

**UNIVERSITATEA TEHNICĂ „GHEORGHE ASACHI”  
DIN IAȘI**



## **REZUMAT**

# **STUDIUL ACCELERĂȚILOR DE ORDIN SUPERIOR ÎN MIȘCAREA SISTEMELOR DE CORPURI CU APLICAȚII ÎN ROBOTICĂ**

**Mihail Cojocari**

**Conducător de doctorat: Prof. univ. dr. ing. Daniel Condurache**

IAȘI, 2025

## Cuprins:

1. INTRODUCERE.....	4
2. STUDIUL DEPLASĂRILOR RIGIDE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL.....	7
2.1 Deplasări sferice .....	7
2.1.1 Definiție .....	7
2.1.2 Reprezentarea deplasărilor sferice cu tensori ortogonali proprii.....	7
2.1.3 Reprezentarea deplasărilor sferice cu quaternionii Hamiltonieni.....	8
2.1.4 Reprezentări minimale pentru deplasările sferice.....	8
2.1.4.1 Parametrizări unghiulare. Unghiuri Davenport-Euler.....	8
2.1.4.2 Transformări Cayley de ordin superior. Vectorul Rodrigues de ordin superior .....	9
2.2 Deplasări rigide generale .....	9
2.2.1 Definiție .....	9
2.2.2 Reprezentarea deplasărilor rigide cu matrici omogene .....	10
2.2.3 Reprezentarea deplasărilor rigide prin algebre duale .....	10
2.2.4 Reprezentări minimale pentru deplasările rigide.....	11
2.2.4.1 Parametrizări unghiulare. Unghiuri duale Davenport-Euler .....	11
2.2.4.2 Parametrizarea folosind quaternioni duali .....	11
2.2.4.3 Parametrizări vectoriale. Vectorul dual Rodrigues și vectorul dual Rodrigues modificat. ....	12
2.2.4.4 Transformări Cayley duale de ordin superior. Vectorul dual Rodrigues de ordin superior 13	
2.3 Compunerea deplasări rigide generale.....	13
2.3.1 Compunerea deplasărilor sferice. Compunerea rotațiilor .....	14
2.3.2 Compunerea deplasărilor rigide cu matrici omogene .....	14
2.3.3 Compunerea deplasărilor rigide prin algebre duale. Tensori ortogonali duali și quaternioni duali .....	15
2.3.4 Compunerea deplasărilor rigide folosind vectorii duali Rodrigues.....	16
3. STUDIUL MIȘCĂRII RIGIDE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL.....	17
3.1 Ecuațiile parametrice ale mișcării rigide .....	17
3.2 Câmpul vectorial al vitezelor.....	18
4. STUDIUL ACCELERAȚIILOR DE ORDIN SUPERIOR ÎN MIȘCAREA RIGIDĂ .....	19
4.1 Studiul accelerațiilor de ordin superior.....	19
4.1.1 Formularea cu grupul Lie a matricelor omogene .....	19
4.1.2 Formularea cu grupul Lie al tensorilor duali .....	19
4.1.3 Formularea cu grupul Lie al tensorilor și quaternionilor multi-duali .....	20
4.1.4 Formularea cu grupul Lie al tensorilor și quaternionilor hiper-multi-duali .....	23
5. STUDIUL ACCELERAȚIILOR DE ORDIN SUPERIOR A SISTEMELOR MULTI-CORP ...	27
5.1 Sisteme multi-corp seriale .....	27
5.1.1 Formularea de tip Brockett cu matricelor omogene. Cazul Iacobienilor seriali.....	27

5.1.2	Formularea de tip Brockett cu grupul Lie al tensorilor duali .....	27
5.1.3	Formularea de tip Brockett cu grupul Lie al tensorilor multi-duali.....	28
5.1.4	Formularea de tip Brockett cu grupul Lie al tensorilor hiper-multi-duali .....	28
6.	APLICAȚII ÎN CAZUL ROBOȚILOR SERIALI ȘI PARALELI.....	30
6.1	Calculul derivatelor de ordinul 1, 2 și 3 a matricei Jacobiene folosind algebra multi-duală pentru un robot 2R .....	30
6.2	Calculul câmpului vitezei, accelerației, și accelerației de ordinul 3 pentru un manipulator general de tip 2C cu 4 grade de libertate.....	31
7.	CONCLUZII ȘI LUCRĂRI VIITOARE .....	33

## 1. INTRODUCERE

De-a lungul istoriei științei, s-a manifestat constant dorința de a descrie cât mai obiectiv și adecvat comportamentul fenomenelor macroscopice. Fiecare descoperire a reprezentat un pas înainte în înțelegerea realității fizice, iar convingerea că s-a atins un punct final al cunoașterii a fost înfirmată de fiecare salt conceptual major. Deși în anumite epoci s-a crezut că nu mai există nimic de descoperit, evoluția teoriilor, de la mecanica clasică la relativitate și mai departe, a demonstrat că înțelegerea fenomenelor fizice este mereu perfectibilă. Newton a formulat legile fundamentale ale mișcării și gravitației, iar Einstein a extins cadrul conceptual prin teoria relativității, redefinind noțiunile de spațiu și timp, dar în același timp, chiar și aceste teorii au limite. În domeniul cinematicii corpurilor solid rigide, aceste idei se traduc prin necesitatea de a depăși nivelul clasic al vitezei și accelerației. În trecut, calculul traiectoriilor se baza aproape exclusiv pe viteza unghiulară, iar precizia era limitată de toleranțele mecanice ale componentelor. Astăzi, datorită progresului în fabricarea pieselor și în controlul mecanic, eroarea generată de toleranțele fizice a devenit neglijabilă, iar sursa principală de imprecizie provine din planificarea traiectoriei. Pentru a obține mișcări mai fluide și mai exacte, este necesară utilizarea accelerațiilor de ordin superior, care permit o descriere mai fină a variației mișcării în timp. Totuși, această extindere nu este lipsită de provocări. Calculul accelerațiilor de ordin superior implică o complexitate computațională ridicată și un consum semnificativ de resurse hardware. În multe cazuri, acest consum devine un obstacol în implementarea practică a algoritmilor de control avansat. De aceea, se impune dezvoltarea unor instrumente matematice care să permită calculul exact al acestor accelerații într-un mod eficient, fără a suprasolicita sistemele de procesare. În acest sens, metodele numerice pot oferi soluții aproximative într-un timp redus, dar pentru aplicații de înaltă precizie este necesar un cadru formal mai robust, bazat pe calcul tensorial și pe structuri algebrice extinse. Un astfel de cadru este oferit de utilizarea structurilor multi-duale și hiper-multi-duale, care permit reprezentarea simultană a poziției, vitezei, accelerației și a accelerațiilor de ordin superior într-un singur obiect matematic. Aceste structuri se bazează pe extinderea algebrei quaternionilor, integrând componente nilpotente care codifică derivatele succesive ale mișcării. Prin această abordare, se evită diferențierea repetată a poziției în raport cu timpul, iar câmpurile de viteză și accelerație pot fi obținute direct, într-o formă închisă și independentă de coordonate. Această metodă oferă nu doar o eficiență computațională sporită, ci și o claritate conceptuală, permițând o integrare naturală în algoritmi de control și simulare. Prin urmare, evoluția roboticii și a mecanicii corpurilor solid rigide impune o reevaluare a metodelor de descriere a mișcării. Precizia actuală nu mai este limitată de hardware, ci de capacitatea modelelor matematice de a surprinde nuanțele dinamice ale traiectoriei. Utilizarea accelerațiilor de ordin superior, însoțită de un formalism adecvat, reprezintă o direcție necesară și promițătoare. Teza de față se înscrie în acest demers, propunând un cadru unitar, coerent și extensibil pentru analiza cinematică de ordin superior, cu aplicații directe în controlul roboților, în optimizarea traiectoriilor și în extinderea capacității de modelare a sistemelor multi-corp. Cinematica corpurilor solid rigide constituie unul dintre domeniile fundamentale ale mecanicii teoretice și aplicate, având un rol esențial în dezvoltarea roboticii moderne și în înțelegerea mișcărilor complexe ale sistemelor multi-corp. Datorită evoluției continue din domeniul roboticii, se caută în permanență noi soluții și metode de planificare a traiectoriei. Interesul pentru relațiile compacte și explicite ale accelerațiilor de ordin superior provin din necesitatea unor metode avansate pentru planificarea optimă a traiectoriei, respectiv controlul roboților și în general a sistemelor din mai multe corpuri. Nu mai este suficientă descrierea pozițiilor și a rotațiilor elementare, pentru a obține performanțe ridicate și pentru a asigura stabilitatea și precizia mișcărilor, este necesară o analiză completă a câmpurilor de viteză, accelerație și a accelerațiilor de ordin superior. Acestea permit o planificare optimă a traiectoriilor, prin creșterea preciziei [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13]. În literatura de specialitate, metodele consacrate pentru descrierea mișcărilor rigide includ

reprezentările prin matrici omogene, quaternionii Hamiltonieni și formalismul grupurilor Lie [14] [15] [16] [17] [18] [19]. Aceste instrumente au demonstrat eficiență în descrierea rotațiilor și translațiilor, dar diversitatea convențiilor și notațiilor utilizate a condus la o lipsă de coerență și la dificultăți în compararea și integrarea rezultatelor. În plus, analiza cinematică de ordin superior a fost abordată fragmentar, fără un cadru unitar care să permită formularea relațiilor într-o formă compactă și generală. Această situație evidențiază necesitatea unui formalism matematic coerent, capabil să unifice notațiile și să ofere expresii independente de coordonate, valabile pentru orice ordin de derivare [20] [21] [22] [23] [24] [25]. Lucrarea de față răspunde acestei necesități printr-un cadru matematic riguros pentru descrierea mișcărilor rigide și a accelerațiilor de ordin superior. Abordarea se bazează pe integrarea conceptelor de analiză vectorială, pe utilizarea structurilor duale și multi-duale și pe extinderea formalismului quaternionilor [26] [27] [28] [29] [30] [31] [32]. Această combinație de instrumente permite obținerea simultană a câmpului vitezei, accelerației și a accelerațiilor de ordin superior, fără a fi necesară diferențierea repetată a poziției în raport cu timpul [33] [34] [35] [36] [37]. Rezultatele sunt formulate într-o formă închisă, independentă de coordonate, și sunt valabile pentru orice câmp a accelerațiilor de ordin superior. Un element central al cercetării îl constituie quaternionii duali, multi-duali și hiper-multi-duali. Aceștia oferă o modalitate elegantă și puternică de a reprezenta rotațiile, translațiile și transformările spațiale complexe. Spre deosebire de metodele tradiționale bazate pe matrici omogene, quaternionii hiper-multi-duali permit obținerea unor relații compacte, care surprind simultan atât poziția, cât și accelerațiile de ordin superior. Această proprietate este deosebit de valoroasă în analiza sistemelor de corpuri seriale, unde propagarea mișcărilor relative de la un corp la altul trebuie descrisă într-un mod precis.

**Capitolul 2** este dedicat studiului deplasărilor rigide în spațiul euclidian tridimensional. Sunt analizate atât deplasările sferice, cât și deplasările generale. Sunt introduse noțiunile fundamentale legate de quaternionii Hamiltonieni, fiind descrise proprietățile lor esențiale și modul în care aceștia pot fi utilizați pentru reprezentarea rotațiilor în spațiul tridimensional. Se evidențiază avantajele oferite de quaternionii unitari în raport cu matricele de rotație și se arată cum aceștia permit obținerea unor formulări compacte și elegante pentru transformările spațiale. Se discută în detaliu structura algebrică a quaternionilor, regulile de compunere, proprietățile de normă și conjugat, precum și modul în care aceste proprietăți se traduc în reprezentări geometrice ale rotațiilor. Reprezentările matematice sunt dezvoltate prin intermediul matricelor omogene, algebrilor duale și quaternionilor duali. Se discută parametrizările minimale, precum unghiurile Davenport–Euler și vectorii Rodrigues, și se evidențiază modul în care aceste reprezentări pot fi integrate într-un cadru unitar. În plus, se arată cum compunerea deplasărilor rigide poate fi realizată prin diverse formalizări, inclusiv prin utilizarea tensorilor ortogonali duali și a quaternionilor duali. Se subliniază importanța acestor reprezentări în evitarea singularităților și în obținerea unor formule compacte, care pot fi utilizate direct în algoritmi de simulare și control.

În **Capitolul 3** este abordată mișcarea rigidă propriu-zisă, fiind formulate ecuațiile parametrice și câmpurile vectoriale ale vitezelor și accelerațiilor. Se analizează proprietățile generale ale acestor câmpuri, invarianții asociați și cazurile particulare de mișcare. Accentul este pus pe modul în care accelerațiile pot fi descrise prin intermediul tensorilor și pe identificarea polului accelerațiilor, cu relevanță directă pentru analiza cinematică. Se arată cum câmpul vitezelor și câmpul accelerațiilor pot fi exprimate prin relații compacte, care evidențiază structura geometrică a mișcării. Se discută cazuri particulare, precum rotația pură, translația pură sau mișcărilor compuse, și se evidențiază modul în care aceste cazuri pot fi tratate în cadrul general al formalismului Lie.

**Capitolul 4** dezvoltă studiul accelerațiilor de ordin superior, utilizând formalismul grupurilor Lie aplicat matricelor omogene, tensorilor duali, quaternionilor multi-duali și hiper-multi-duali. Se arată cum aceste structuri permit obținerea simultană a câmpului vitezei, accelerației și a accelerațiilor de ordin superior, fără a fi necesară diferențierea repetată a poziției în raport cu timpul. Rezultatele sunt

prezentate într-o formă închisă, independentă de coordonate, și sunt valabile pentru orice ordin de derivare. Sunt evidențiate principalele avantaje oferite de aceste formulări în analiza cinematică de ordin superior. Se subliniază modul în care structurile multi-duale și hiper-multi-duale permit codarea simultană a hiper-stării (poziție, viteză, accelerație, accelerație de ordin superior până la orice ordin necesar) transformărilor rigide.

În **Capitolul 5**, analiza este extinsă la sisteme multi-corp seriale, prin formulări de tip Brockett. Se arată modul în care accelerațiile de ordin superior se propagă de la un corp la altul în lanțurile cinemate, iar rezultatele sunt aplicate pentru descrierea mișcărilor relative și pentru determinarea accelerațiilor de ordin superior a rotațiilor spațiale ale corpului terminal. Se arată cum formalismul matematic poate fi utilizat pentru analiza sistemelor multi-corp, oferind un cadru general și riguros pentru descrierea mișcărilor complexe. Se discută în detaliu modul în care derivatele de ordin superior în raport cu timpul ale rotațiilor corpului terminal se obțin din derivatele mișcărilor relative, păstrând clara separație între cinematică internă și efectul acumulat.

**Capitolul 6** prezintă aplicații în cazul roboților. Se evidențiază relevanța practică a formalismului dezvoltat, prin exemple care arată cum relațiile matematice obținute pot fi utilizate pentru planificarea traiectoriei și pentru controlul mișcărilor. Se subliniază avantajele oferite de formulările compacte și independente de coordonate în optimizarea algoritmilor de control și în creșterea preciziei mișcărilor robotice. Se discută modul în care aceste rezultate pot fi integrate în algoritmi de planificare și control, contribuind la dezvoltarea unor metode avansate de analiză și optimizare. Utilizând quaternioni HMD putem obține simultan câmpul vitezei, accelerației și a oricărei accelerații de ordin superior. Aceasta se obține fără necesitatea unei diferențieri suplimentare a poziției corpului în raport cu timpul. Rezultatele sunt valabile pentru orice număr natural  $n \geq 1$ , sunt fără coordonate și într-o formă închisă [12] [37] [11] [10] [35] [9].

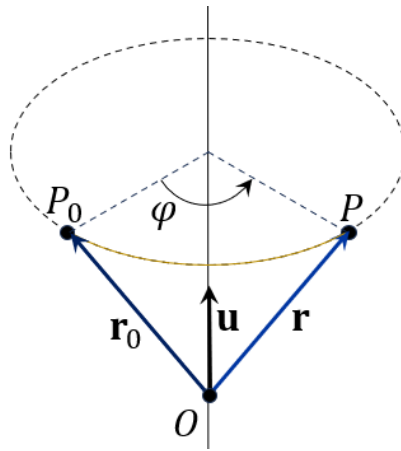
Ultimul capitol sintetizează concluziile cercetării și propune direcții viitoare de dezvoltare. Se evidențiază contribuțiile principale ale tezei, constând în formularea unui cadru unitar pentru descrierea mișcărilor rigide și a accelerațiilor de ordin superior, precum și în demonstrarea aplicabilității acestui cadru în robotică. Se sugerează extinderea cercetării către noi domenii ale mecanicii teoretice și către dezvoltarea unor metode avansate.

## 2. STUDIUL DEPLASĂRILOR RIGIDE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL

### 2.1 Deplasări sferice

#### 2.1.1 Definiție

O deplasare sferică este o mișcare solid rigidă a unui corp în spațiul euclidian tridimensional care are loc în jurul unui punct fix. În această situație, traiectoriile tuturor punctelor corpului se află pe sfere concentrice cu centrul în punctul fix [38]. Conform teoremei lui Euler, orice deplasare sferică a unui corp solid rigid poate fi descrisă ca o rotație unică în jurul unei axe ce intersectează punctul fix,  $O$ . Dacă considerăm un versor  $\mathbf{u}$  ce definește direcția acestei axe și un unghi  $\varphi \in [0, 2\pi)$  ce definește valoarea unghiulară a rotației, atunci poziția inițială a punctului, dată de vectorul de poziție  $\mathbf{r}_0$ , se transformă după rotație într-un nou vector de poziție  $\mathbf{r}$ , precum este reprezentat în **Figura 2.1**. [39]



**Figura 2.1.** Reprezentarea grafică a rotației față de o axă ce trece prin punctul  $O$ .

Legătura dintre vectorul  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{r}_0$  este dată de următoarea relație [38]:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{r}_0 + \sin \varphi \mathbf{u} \times \mathbf{r}_0 - \cos \varphi \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_0) \quad (2.1)$$

Dacă notăm prin  $\mathbf{R}$  tensorul:

$$\mathbf{R} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \sin \varphi \tilde{\mathbf{u}} - \cos \varphi \tilde{\mathbf{u}}^2 \quad (2.2)$$

în care  $\tilde{\mathbf{u}}$  este tensorul antisimetric corespunzător lui  $\mathbf{u}$ , iar expresia  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$  reprezintă produsul tensorial (diadic) dintre versorul  $\mathbf{u}$  aplicat asupra lui însuși [39].

Relația (2.1) poate fi scrisă și sub următoarea formă:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (2.3)$$

Tensorul  $\mathbf{R}$  se numește tensor de rotație și are următoarele proprietăți:

#### 2.1.2 Reprezentarea deplasărilor sferice cu tensori ortogonali proprii

O metodă eficientă de reprezentare a deplasărilor sferice constă în utilizarea tensorilor ortogonali proprii. Acești tensori exprimă transformări liniare care conservă distanțele și unghiurile, fiind astfel ideali pentru descrierea rotațiilor pure, fără deformări. Ortogonalitatea garantează păstrarea structurii geometrice a corpului, iar caracterul propriu al tensorului reflectă existența unor direcții privilegiate,

asociate cu axele de rotație ale sistemului analizat. Prin intermediul acestei abordări tensoriale, se obține o formulare matematică clară și concisă a mișcărilor sferice.

### 2.1.3 *Reprezentarea deplasărilor sferice cu quaternionii Hamiltonieni*

În 1843 Hamilton a inventat numerele hiper-complexe de rang 4 pe care le-a denumit quaternioni. De o importanță deosebită este regula sa

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad (2.4)$$

pentru a trata operațiunile pe partea vectorială a quaternionului.

Un set de quaternioni, împreună cu operația de adunare și multiplicare formează un sistem matematic denumit inel, adică mai exact un inel necomutativ de divizare. Această denumire evidențiază faptul că produsul quaternionilor în general este necomutativ și că există o inversă a operației de multiplicare pentru orice element diferit de zero din set.

Mai concis putem evidenția că un set de quaternioni sub operația de adunare și multiplicare satisface toate proprietățile de adunare și multiplicare cu excepția operației de comutativitate a multiplicării. [40]

În continuare se va defini un quaternion ca fiind suma

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \quad (2.5)$$

În această sumă  $q_0$  este partea scalară a quaternionului, iar  $\mathbf{q}$  este partea vectorială a quaternionului.

Definit în acest mod se poate observa că quaternionul reprezintă o structură matematică formată din suma unui scalar cu un vector, ceva ce nu este definit în algebra liniară obișnuită. În continuare se va defini adunarea și multiplicarea quaternionilor.

### 2.1.4 *Reprezentări minimale pentru deplasările sferice*

Dincolo de tensorul de rotație, rotațiile finite ale unui corp solid rigid pot fi caracterizate și printr-un număr de cantități capabile să dezvăluie într-un mod adecvat elementele constitutive ale unei rotații finite. Caracteristica comună a acestor reprezentări este faptul că parametrii respectivi sunt determinați în mod unic de invarianții naturali ai tensorului de rotație (vectorul unitar  $\mathbf{u}$  și unghiul  $\varphi$ ), fiind capabili să determine în mod unic tensorul de rotație.

#### 2.1.4.1 *Parametrizări unghiulare. Unghiuri Davenport-Euler*

Grupul Lie  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$  descrie toate rotațiile posibile ale unui corp rigid în spațiu, iar parametrizarea acestor rotații prin unghiuri reale este esențială pentru formularea algoritmică și geometrică a mișcărilor sferice. În această secțiune se analizează parametrizarea rotațiilor prin secvențe de rotații succesive, cunoscute sub denumirea de unghiuri Davenport–Euler, care oferă o reprezentare minimă și coordonată a elementelor din  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$ .

Orice rotație din grupul ortogonal special  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$  poate fi exprimată ca o succesiune de trei rotații, fie cu două axe perpendiculare (secvențe Euler) sau cu trei axe reciproc perpendiculare (secvențe Euler). Dacă cele trei axe sunt reciproc perpendiculare, există douăsprezece secvențe Euler posibile [41].

Transformarea Cayley este o funcție din algebra Lie  $\mathfrak{so}_3$  în grupul Lie  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$ :

$$\begin{aligned} \text{cay}: \mathfrak{so}_3 &\rightarrow \mathbb{S}\mathbb{O}_3, \\ \text{cay}\tilde{\boldsymbol{\rho}} &= (\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\rho}})^{-1}(\mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Funcția  $\text{cay}\tilde{\boldsymbol{\rho}}$  (2.6) este într-o formă închisă:

$$\text{cay}\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \frac{2}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|^2} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}^2 + \tilde{\boldsymbol{\rho}}) + \mathbf{I}. \quad (2.7)$$

Dacă  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ , atunci  $\text{cay}\mathbf{0} = \mathbf{I}$ . Dacă  $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}$ , după câteva calcule algebrice, obținem:

$$\text{cay}\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \left(1 - \frac{1 - \|\boldsymbol{\rho}\|^2}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|^2}\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^2}{\|\boldsymbol{\rho}\|^2} + \left(\frac{2\|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|^2}\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\|\boldsymbol{\rho}\|} + \mathbf{I}. \quad (2.8)$$

Pentru  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \tan \frac{\alpha}{2} \tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\alpha \neq k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , rezultă:

$$\text{cay}\left(\tan \frac{\alpha}{2} \tilde{\mathbf{u}}\right) = (1 - \cos\alpha)\tilde{\mathbf{u}}^2 + \sin\alpha\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{I}. \quad (2.9)$$

Vectorul  $\boldsymbol{\rho} = \tan \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}$ , numit vectorul Rodrigues-Gibbs, este parametrizat de funcția Cayley (2.7) și tensorul ortogonal propriu prin invarianții naturali  $\alpha$  și  $\mathbf{u}$  [8].

#### 2.1.4.2 Transformări Cayley de ordin superior. Vectorul Rodrigues de ordin superior

În această secțiune, vom generaliza transformarea Cayley definită pe algebra Lie  $\mathfrak{so}_3$  în grupul Lie  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$  în sensul extinderii parametrizării vectoriale a vectorului Rodrigues-Gibbs pentru rotații. Abordarea constructivă utilizează doar calcule algebrice elementare cu vectori și tensori euclidiani.

Definim transformarea Cayley de ordin superior prin:

$$\begin{aligned} \text{cay}_n: \mathbb{V}_3 &\rightarrow \mathbb{S}\mathbb{O}_3 \\ \text{cay}_n(\boldsymbol{\rho}) &= (\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\rho}})^{-n}(\mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\rho}})^n, n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned} \quad (2.10)$$

unde  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$  este un tensor Euclidian antisimetric corespunzător vectorului  $\boldsymbol{\rho}$ .

## 2.2 Deplasări rigide generale

### 2.2.1 Definiție

Mișcarea rigidă generală reprezintă transformarea unui corp în spațiul euclidian tridimensional  $\mathbb{S}\mathbb{E}_3$  care conservă integral structura geometrică a acestuia. Ea se caracterizează prin faptul că distanțele dintre puncte, unghiurile dintre segmente și orientarea relativă a elementelor corpului rămân invariabile pe parcursul deplasării. Din punct de vedere teoretic, mișcarea rigidă generală aparține clasei isometriilor proprii ale spațiului euclidian, fiind descrisă ca o compoziție de rotație și translație.

**Observația 2.1.** Pentru a reprezenta mișcarea generală a unui corp solid rigid, descriem poziția și orientarea unui reper mobil  $\{R'\}$  atașat corpului, în raport cu un reper fix  $\{R\}$  (precum în Figura 2.3). Fie  $\mathbf{r}_Q = \text{vect } OQ \in \mathbb{V}_3$  vectorul poziției originii reperului  $\{R'\}$  față de originea reperului  $\{R\}$ , și  $\mathbf{R}_Q \in \mathbb{S}\mathbb{O}_3$  orientarea reperului  $\{R'\}$  în raport cu reperul  $\{R\}$ . O configurație a sistemului constă în perechea  $(\mathbf{r}_Q, \mathbf{R}_Q)$ , iar spațiul de configurație al sistemului este spațiul euclidian

tridimensional  $SE_3$  (grupul euclidian special).

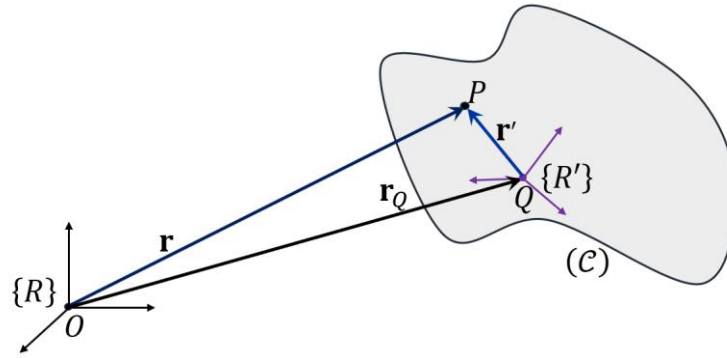


Figura 2.2. Reprezentarea grafică a deplasării rigide generale

### 2.2.2 Reprezentarea deplasărilor rigide cu matrici omogene

Pentru a reprezenta deplasările rigide cu matrici omogene se va analiza transformarea vectorilor prin intermediul transformărilor rigide. Sub formă matricială un vector  $\mathbf{r}_P = \text{vect } OP \in \mathbb{V}_3$  poate fi scris sub următoarea formă [42].

Transformarea din ecuația **Error! Reference source not found.** este o transformare afină. Utilizând notația anterioară, o putem reprezenta într-o formă liniară scriind-o astfel:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Matricea  $4 \times 4$  este denumită matrice omogenă și poate fi scrisă precum

$$\mathbf{g}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Utilizarea unei reprezentări omogene sau liniare crește dimensiunea mărimilor de la 3 la 4. Ultimul rând al matricei din ecuația (2.12) este adesea considerat inutil sau suplimentar în transformările corpurilor rigide. În literatura de grafică, acest rând este uneori modificat pentru a reprezenta dilatarea, contracția sau transformări de perspectivă, ceea ce se abate de la deplasarea rigidă.

### 2.2.3 Reprezentarea deplasărilor rigide prin algebre duale

În această secțiune se vor prezenta numerele duale, vectorii duali și respectiv tensorii duali. Reprezentarea deplasărilor rigide în spațiul tridimensional poate fi realizată eficient prin intermediul algebrelor duale, care permit o formulare unificată a rotației și translației. Această abordare este esențială în teoria cinematicii corpurilor rigide, în special în cadrul mișcărilor de rototranslație, unde rotația și translația sunt simultane și interdependente, [8], [13], [20] [43], [44], [45].

Numerele duale au fost introduse pentru prima dată în secolul 1873 de către W. K. Clifford. Ele sunt expresii de forma  $a + b\varepsilon$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale, iar  $\varepsilon$  este un simbol ce satisface condiția  $\varepsilon^2 = 0$ .

Un set de numere duale este notat prin [39]

$$\underline{\mathbb{R}} = \{ \underline{a} = a + \varepsilon a_0 \mid a, a_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \} \quad (2.13)$$

în care  $a = \text{Re}(\underline{a})$  este partea reală a lui  $\underline{a}$  și  $a_0 = \text{Du}(\underline{a})$  este partea duală a lui  $a$ .

Orice funcție diferențiabilă  $f: \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(a)$  poate fi definită complet în  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  așa în cât:

$$f: \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{a}) = f(a) + \varepsilon a_0 f'(a) \quad (2.14)$$

Prin urmare operațiile cu numerele duale se pot utiliza pentru aflarea valorii unei funcții  $f(x)$  calculând în același timp și derivata acesteia  $f'(x)$ .

Ansamblul de vectori duali este definit prin [12] [10]:

$$\underline{\mathbb{V}}_3 = \mathbb{V}_3 + \varepsilon \mathbb{V}_3 = \{ \underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}_0 \mid \mathbf{a}, \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \} \quad (2.15)$$

în care  $\mathbf{a} = \text{Re}(\underline{\mathbf{a}})$  reprezintă partea reală a lui  $\underline{\mathbf{a}}$ , respectiv  $\mathbf{a}_0 = \text{Du}(\underline{\mathbf{a}})$  este partea duală a lui  $\underline{\mathbf{a}}$ . O aplicație  $\mathbb{R}$  liniară a spațiului  $\underline{\mathbb{V}}_3$  în spațiul  $\underline{\mathbb{V}}_3$  se numește tensor euclidian dual de ordinul doi:

$$\underline{\mathbf{T}}(\underline{\lambda}_1 \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\lambda}_2 \underline{\mathbf{v}}_2) = \underline{\lambda}_1 \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{v}}_1) + \underline{\lambda}_2 \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{v}}_2), \forall \underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2 \in \mathbb{R}, \forall \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2 \in \underline{\mathbb{V}}_3 \quad (2.16)$$

Fie  $\mathbb{L}(\underline{\mathbb{V}}_3, \underline{\mathbb{V}}_3)$  un set de tensori duali, orice tensor dual  $\underline{\mathbf{T}} \in \mathbb{L}(\underline{\mathbb{V}}_3, \underline{\mathbb{V}}_3)$  poate fi descompus ca  $\underline{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \varepsilon \mathbf{T}_0$ , în care  $\mathbf{T}, \mathbf{T}_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{V}_3, \mathbb{V}_3)$  sunt tensori euclidieni reali.

**Teorema 2.1.** Pentru orice tensor ortogonal dual  $\underline{\mathbf{R}}$  definit ca în relația (2.258) un număr dual  $\underline{\alpha} = \alpha + \varepsilon d$  și un vector unitar dual  $\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}_0$  se pot calcula pentru a avea următoarea ecuație [12]:

$$\underline{\mathbf{R}}(\underline{\alpha}, \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{I}} + (\sin \underline{\alpha}) \underline{\mathbf{u}} + (1 - \cos \underline{\alpha}) \underline{\mathbf{u}}^2 = \exp(\underline{\alpha}, \underline{\mathbf{u}}) \quad (2.17)$$

## 2.2.4 Reprezentări minimale pentru deplasările rigide

### 2.2.4.1 Parametrizări unghiulare. Unghiuri duale Davenport-Euler

Isomorfismul dintre grupurile Lie  $\mathbb{SE}_3$  și  $\mathbb{SQ}_3$  permite rezolvarea problemei determinării decompoziției unei deplasări rigide într-o succesiune de trei deplasări rigide cu axe de rototranslație date. Fie o deplasare rigidă reprezentată prin tensorul dual ortogonal  $\underline{\mathbf{R}}$ , pentru determinarea a trei deplasări rigide  $\underline{\mathbf{R}}_1, \underline{\mathbf{R}}_2, \underline{\mathbf{R}}_3$  cu axe de rototranslație cunoscute, descrise prin vectorii duali unitari  $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ , astfel încât [41]:

$$\underline{\mathbf{R}}_1 \underline{\mathbf{R}}_2 \underline{\mathbf{R}}_3 = \underline{\mathbf{R}} \quad (2.18)$$

Problema se reduce la determinarea unghiurilor duale  $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3$  astfel încât [41]:

$$\underline{\mathbf{R}}_1(\underline{\alpha}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) \underline{\mathbf{R}}_2(\underline{\alpha}_2, \underline{\mathbf{u}}_2) \underline{\mathbf{R}}_3(\underline{\alpha}_3, \underline{\mathbf{u}}_3) = \underline{\mathbf{R}}(\underline{\alpha}, \underline{\mathbf{u}}) \quad (2.19)$$

### 2.2.4.2 Parametrizarea folosind quaternioni duali

Un set de quaternioni duali, notat  $\underline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + \varepsilon \mathbb{Q}$ , unde  $\mathbb{Q}$  reprezintă algebra necomutativă a quaternionilor reali. Un element generic al quaternionilor duali este notat cu  $\underline{\mathbf{q}}$  [2].

$$\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}_0, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0 \in \mathbb{Q} \quad (2.20)$$

Dacă se consideră adunarea și înmulțirea quaternionilor duali cu numere duale, mulțimea quaternionilor duali  $\underline{\mathbb{Q}}$  este un modul liber  $\underline{\mathbb{R}}$  de rang 4.

Produsul a doi quaternioni duali  $\underline{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_1 + \varepsilon \mathbf{q}_{10}$  și  $\underline{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2 + \varepsilon \mathbf{q}_{20}$  este definit prin [2]:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + \varepsilon (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_{20} + \mathbf{q}_{10} \mathbf{q}_2) \quad (2.21)$$

Orice quaternion dual poate fi scris ca:  $\underline{\mathbf{q}} = \underline{q} + \underline{\mathbf{q}}$ . Produsul a doi quaternioni duali  $\underline{\mathbf{q}}_1 = \underline{q}_1 + \varepsilon \underline{\mathbf{q}}_1$  și  $\underline{\mathbf{q}}_2 = \underline{q}_2 + \varepsilon \underline{\mathbf{q}}_2$  este dat de ecuația:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 - \underline{\mathbf{q}}_1 \cdot \underline{\mathbf{q}}_2 + \underline{q}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 + \underline{q}_2 \underline{\mathbf{q}}_1 + \underline{\mathbf{q}}_1 \times \underline{\mathbf{q}}_2 \quad (2.22)$$

Partea scalară  $\underline{q}$ , și partea vectorială  $\underline{\mathbf{q}}$ , ale unui quaternion dual unitar sunt numite și parametri duali Euler [2], [8], [13].

**Teorema 2.2.** *Următoarea relație unică este validă în cazul oricărui  $\underline{\mathbf{q}} \in \underline{\mathbb{U}}$ :*

$$\underline{\mathbf{q}} = \left( 1 + \varepsilon \frac{1}{2} \mathbf{r} \right) \mathbf{q} \quad (2.23)$$

unde  $\mathbf{r} \in \mathbb{V}_3$  și  $\mathbf{q} \in \mathbb{U}$ .

$\exists \underline{\alpha}$ , respectiv  $\underline{\mathbf{u}}$  în așa fel încât

$$\underline{\mathbf{q}} = \cos \frac{\alpha}{2} + \underline{\mathbf{u}} \sin \frac{\alpha}{2} = \exp \left( \frac{\alpha}{2} \underline{\mathbf{u}} \right), \forall \underline{\mathbf{q}} \in \underline{\mathbb{U}}. \quad (2.24)$$

#### 2.2.4.3 Parametrizări vectoriale. Vectorul dual Rodrigues și vectorul dual Rodrigues modificat.

Algebra Lie a tensorilor duali ortogonali  $\underline{\mathbb{S}}\mathbb{O}_3$  este mulțimea tensorilor duali antisimetrice notată cu  $\underline{\mathbb{S}}\mathbb{O}_3 = \{ \underline{\tilde{\alpha}} \in \mathbf{L}(\underline{\mathbb{V}}_3, \underline{\mathbb{V}}_3) \mid \underline{\tilde{\alpha}} = -\underline{\tilde{\alpha}}^T \}$ , unde interdependența internă este  $\langle \underline{\tilde{\alpha}}_1, \underline{\tilde{\alpha}}_2 \rangle = \underline{\tilde{\alpha}}_1 \underline{\tilde{\alpha}}_2$ .

O aplicație între algebra Lie  $\underline{\mathbb{S}}\mathbb{O}_3$  și grupul Lie  $\underline{\mathbb{S}}\mathbb{O}_3$  o reprezintă transformarea Cayley de ordinul întâi.

**Teorema 2.3.** *Funcția*

$$\text{cay}(\cdot) : \underline{\mathbb{S}}\mathbb{O}_3 \rightarrow \underline{\mathbb{S}}\mathbb{O}_3, \text{cay}(\underline{\tilde{\mathbf{v}}}) = (\underline{\mathbf{I}} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}})(\underline{\mathbf{I}} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}})^{-1} \quad (2.25)$$

este bine definită și surjectivă.

**Observația 2.2.** *Atunci când  $|\underline{\mathbf{v}}| \in \mathbb{R}$ , obținem că  $\text{cay}(\underline{\tilde{\mathbf{v}}})$  reprezintă o rotație pură în jurul unei axe ce nu trece obligatoriu prin originea reperului. Dar când  $|\underline{\mathbf{v}}| \in \varepsilon \mathbb{R}$ , funcția reprezintă o translație pură. În cazul contrar,  $\text{cay}(\underline{\tilde{\mathbf{v}}})$  reprezintă o deplasare de rototranslație generală.*

Transformarea Cayley este o funcție dintr-o algebră Lie peste grupul propriu Lie. Considerând specificațiile spațiului  $\underline{\mathbb{V}}_3$  (mulțimea quaternionilor vectoriali), respectiv  $\underline{\mathbb{U}}$ , următoarea afirmație este adevărată [8], [13]:

**Teorema 2.4.** *Funcția Cayley:  $\text{cay}: \underline{\mathbb{V}}_3 \rightarrow \underline{\mathbb{U}}$*

$$\text{cay}(\underline{\mathbf{v}}) = (1 + \underline{\mathbf{v}})(1 - \underline{\mathbf{v}})^{-1} \quad (2.26)$$

este bine definită și surjectivă.

#### 2.2.4.4 Transformări Cayley duale de ordin superior. Vectorul dual Rodrigues de ordin superior

În această secțiune se utilizează un set de transformări Cayley ce ne vor permite determinarea vectorului dual Rodrigues de ordin superior [8], [13].

**Teorema 2.5.** Funcția Cayley de ordin fracționar  $\text{cay}_{\frac{n}{2}}: \mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{U}$

$$\text{cay}_{\frac{n}{2}}(\underline{\mathbf{v}}) = (1 + \underline{\mathbf{v}})^{\frac{n}{2}}(1 - \underline{\mathbf{v}})^{-\frac{n}{2}}, n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.27)$$

este bine definită și surjectivă.

**Observația 2.3.** Dacă  $|\underline{\mathbf{v}}| \in \mathbb{R}$ , atunci  $\text{cay}_{\frac{n}{2}}(\underline{\mathbf{v}})$  reprezintă o rotație pură în jurul unei axe care nu intersectează obligatoriu originea reperului. Iar dacă  $|\underline{\mathbf{v}}| \in \varepsilon\mathbb{R}$ , funcția  $\text{cay}_{\frac{n}{2}}(\underline{\mathbf{v}})$  reprezintă o translație pură. În cazul contrar funcția  $\text{cay}_{\frac{n}{2}}(\underline{\mathbf{v}})$  reprezintă o deplasare de rototranslație generală. Considerând că există  $\underline{\alpha}$  și  $\underline{\mathbf{u}}$  în așa fel încât:

$$\underline{\mathbf{q}} = \cos \frac{\alpha}{2} + \underline{\mathbf{u}} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (2.28)$$

rezultă că

$$\underline{\mathbf{v}} = \tan \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \underline{\mathbf{u}}, k = \{0, 1, \dots, n - 1\}. \quad (2.29)$$

Ecuția anterioară conține atât parametrizarea principală [8], [13].

$$\underline{\mathbf{v}}_0 = \tan \frac{\alpha}{2n} \underline{\mathbf{u}}, \quad (2.30)$$

care reprezintă vectorul dual Rodrigues de ordin superior.

Vectorii duali în cazul în care  $k = \{1, \dots, n - 1\}$ :

$$\underline{\mathbf{v}}_k = \tan \frac{\alpha + 2k\pi}{2n} \underline{\mathbf{u}} \quad (2.31)$$

care constituie parametrizarea proiecțiilor, utilizabilă pentru descrierea aceleiași poziții [8], [13].

### 2.3 Compunerea deplasări rigide generale

Compunerea deplasărilor rigide este un aspect fundamental în teoria mișcării corpurilor solid rigide, întrucât permite determinarea efectului global al mai multor transformări succesive. În contextul algebrilor și grupurilor Lie, compunerea este o operație internă în grupul  $\mathbb{SE}_3$ , respectiv  $\mathbb{SO}_3$  pentru rotații pure.

### 2.3.1 Compunerea deplasărilor sferice. Compunerea rotațiilor

Mișcarea sferică a unui corp rigid este descrisă prin rotații în spațiul tridimensional, aparținând grupului Lie  $\mathbb{SO}_3$ . Aceste rotații conservă distanțele și unghiurile dintre puncte, fiind esențiale în descrierea cinematicii corpurilor rigide [46].

Grupul special ortogonal tridimensional este definit prin:

$$\mathbb{SO}_3 = \{\mathbf{R} \in \mathbb{L}(\mathbb{V}_3, \mathbb{V}_3) : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = 1\} \quad (2.32)$$

unde  $\mathbf{R}$  este o matrice de rotație.

Compunerea rotațiilor se face prin produsul matricial:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (2.33)$$

unde  $\mathbf{R}_1$  și  $\mathbf{R}_2$  sunt rotații succesive. Această formulare este utilizată extensiv în robotică și mecanica corpurilor rigide.

Orice rotație poate fi exprimată prin exponențierea unei matrice antisimetrice  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathfrak{so}_3$ , unde  $\mathbf{u}$  este vectorul axei de rotație, iar  $\theta$  este unghiul de rotație:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \theta) = \exp(\tilde{\mathbf{u}}\theta) \quad (2.34)$$

unde  $\tilde{\mathbf{u}}$  este matricea antisimetrică corespunzătoare versorului  $\mathbf{u}$ :

Pentru rotații în jurul unei axe fixe, formula Rodrigues oferă o expresie explicită:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}} \sin \theta + \tilde{\mathbf{u}}^2 (1 - \cos \theta) \quad (2.35)$$

Quaternionii permit compunerea rotațiilor prin produsul quaternionic:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 \quad (2.36)$$

unde ordinea este importantă, deoarece produsul quaternionic nu este comutativ. Această metodă este preferată în aplicații precum simularea mișcărilor sferice.

### 2.3.2 Compunerea deplasărilor rigide cu matrici omogene

Mișcarea unui corp solid rigid în spațiul tridimensional implică atât mișcare de rotație, cât și mișcare de translație. Pentru a descrie complet o astfel de deplasare, se utilizează matrici omogene care aparțin grupului Lie  $\mathbb{SE}_3$ , format din transformări rigide [42]. Acestea permit compunerea elegantă și eficientă a deplasărilor succesive prin operații matriciale.

Grupul special euclidian tridimensional este definit ca:

$$\mathbb{SE}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mid \mathbf{R} \in \mathbb{SO}_3, \mathbf{r} \in \mathbb{V}_3 \right\} \quad (2.37)$$

în care  $\mathbf{R}$  este matricea de rotație,  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție.

Fie două transformări rigide succesive  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{SE}_3$ , compunerea lor se face prin produsul matricial:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \quad (2.38)$$

unde:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Rezultatul este:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Relația (2.41) reflectă compunerea rotațiilor și translațiilor într-un cadru unificat. Este utilizată extensiv în modelarea lanțurilor cinematice, manipuletoarelor robotice și sistemelor de referință mobile [42].

### 2.3.3 *Compunerea deplasărilor rigide prin algebre duale. Tensori ortogonali duali și quaternioni duali*

Reprezentarea mișcărilor rigide în spațiul tridimensional poate fi extinsă dincolo de matricele omogene prin utilizarea algebrelor duale, care permit o formulare unificată a rotației și translației [19]. Această abordare este esențială în modelarea cinematicii corpurilor rigide, în special în aplicații care implică compunerea mișcărilor infinitezimale sau analiza mișcării de rototranslație.

Spațiul vectorial dual  $\underline{\mathbb{V}}_3$  este format din vectori duali:

$$\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_0 + \varepsilon \mathbf{a}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}_3 \quad (2.42)$$

unde  $\mathbf{a}_0$  reprezintă componenta reală (rotație), iar  $\mathbf{a}_1$  componenta duală (translație).

Un tensor ortogonal dual  $\underline{\mathbf{R}}$  este o extensie a unei matrice de rotație  $\mathbf{R} \in \mathbb{S}\mathbb{O}_3$  în spațiul dual:

$$\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \varepsilon \tilde{\mathbf{d}} \mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}_3 \quad (2.43)$$

unde  $\tilde{\mathbf{d}}$  este matricea antisimetrică asociată vectorului de translație  $\mathbf{d}$ . Acest tensor permite compunerea simultană a rotației și translației într-un cadru algebric unificat.

Un quaternion dual este definit ca:

$$\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_R + \varepsilon \mathbf{q}_d, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}_3 \quad (2.44)$$

unde  $\mathbf{q}_R$  este quaternionul real (rotație), iar  $\mathbf{q}_d$  este quaternionul dual (translație). Expresia (2.44) este echivalentă cu (2.24).

Pentru o mișcare rigidă, quaternionul dual unitar satisface:

$$\underline{\mathbf{q}} \underline{\mathbf{q}}^* = 1 \quad (2.45)$$

unde  $\underline{\mathbf{q}}^*$  este conjugatul dual al quaternionului  $\underline{\mathbf{q}}$ . Această formulare permite compunerea mișcărilor rigide prin produsul quaternionic dual:

$$\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}_2 \cdot \underline{\mathbf{q}}_1 \quad (2.46)$$

### 2.3.4 Compunerea deplasărilor rigide folosind vectorii duali Rodrigues

Reprezentarea mișcărilor rigide în spațiul tridimensional poate fi realizată prin extinderea formulei vectorului Rodrigues în spațiul dual, utilizând vectori duali Rodrigues. Această abordare permite descrierea simultană a rotației și translației într-un cadru geometric unificat, fiind esențială în analiza cinematicii corpurilor rigide și în teoria de rototranslație [3].

Formula Rodrigues clasică exprimă o rotație în jurul unei axe dată de vectorul unitar  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$  cu unghiul  $\theta$  prin:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \theta \cdot \tilde{\mathbf{u}} + (1 - \cos \theta) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^2 \quad (2.47)$$

Extinderea acestei formule în spațiul dual presupune definirea unui vector dual Rodrigues:

$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{d} \quad (2.48)$$

unde:  $\mathbf{u}$  este componenta reală (axa de rotație),  $\mathbf{d}$  este componenta duală (vectorul de translație), iar  $\varepsilon$  este unitatea duală cu proprietatea  $\varepsilon^2 = 0$

Formula extinsă pentru o transformare rigidă exprimată prin vectorul dual Rodrigues este:

$$\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{I} + \sin \theta \cdot \underline{\tilde{\mathbf{u}}} + (1 - \cos \theta) \cdot \underline{\tilde{\mathbf{u}}}^2 \quad (2.49)$$

unde  $\underline{\tilde{\mathbf{u}}}$  este tensorul antisimetric dual asociat vectorului unitar dual  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ .

Această formulare permite obținerea simultană a rotației și translației într-o singură expresie, fiind echivalentă cu exponențierea unei rotații în spațiul  $\mathbb{S}\mathbb{e}_3$ , dar exprimată în termeni duali.

Vectorii duali Rodrigues sunt direct legați de teoria de rototranslație, unde o mișcare rigidă este descrisă ca o rotație în jurul unei axe însoțită de o translație de-a lungul acelei axe. Fie o axă de rototranslație definită prin  $\mathbf{u}$  și o translație  $\mathbf{d}$ , mișcarea se exprimă prin [3]:

$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \varepsilon(\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \quad (2.50)$$

Această formulare este compatibilă cu reprezentarea prin quaternioni duali și cu compunerea infinitezimală a mișcărilor rigide.

Compunerea mișcărilor rigide prin intermediul vectorilor Rodrigues duali se face asemănător produsului quaternionic dual (2.46) definit de (2.21)

### 3. STUDIUL MIȘCĂRII RIGIDE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL

Mișcarea rigidă constituie baza formală pentru descrierea cinematicii sistemelor de corpuri, fiind indispensabilă în analiza configurațiilor și traiectoriilor din robotică. În spațiul euclidian tridimensional, aceasta se exprimă prin transformări care conservă structura metrică. Prezentul capitol fundamentează aceste transformări, evidențiind proprietățile lor algebrice și geometrice, ca etapă necesară pentru formularea accelerațiilor de ordin superior în mișcarea sistemelor de corpuri.

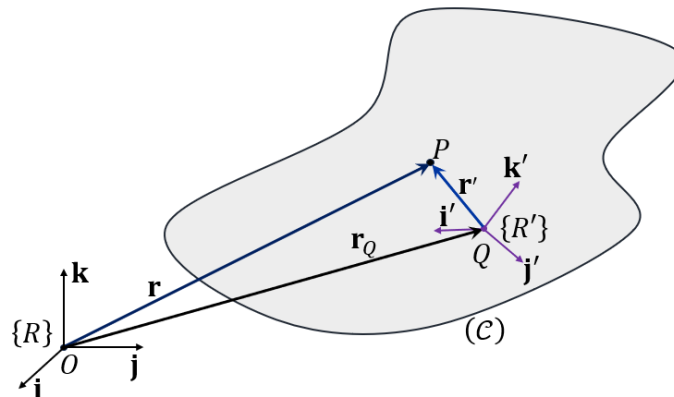
#### 3.1 Ecuațiile parametrice ale mișcării rigide

Pentru a obține ecuațiile parametrice ale mișcării rigide, se va analiza un corp solid rigid ce se mișcă în raport cu un sistem de referință fix (reper fix)  $\{R\}$ . Considerând un alt sistem de referință (reper mobil)  $\{R'\}$  ce are originea în punctul  $Q$ , punct ce se mișcă împreună cu corpul solid rigid [12].

Considerând cele enunțate anterior ecuația parametrică vectorială de mișcare poate fi scrisă sub următoarea formă [39], [47]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{R} \text{vect } QP = \mathbf{r}_Q + \mathbf{R}\mathbf{r}' \quad (3.1)$$

în care  $\mathbf{r}$  reprezintă poziția absolută a unui punct generic  $P$  ce aparține corpului solid rigid față de sistemul de referință fix  $\{R\}$ ,  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_Q(t)$  este legea de mișcare a punctului  $Q$  în spațiul vectorial tridimensional real  $\mathbb{V}_3^{\mathbb{R}}$ , și  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$  este o funcție tensorială în spațiul ortogonal tridimensional  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3^{\mathbb{R}}$  căreia îi corespunde matricea de rotație  $\mathbf{R}$ . Vectorul  $\mathbf{r}'$  este constant și reprezintă vectorul de poziție relativă a oricărui punct  $P$  față de sistemul de referință  $\{R'\}$  [47].



**Figura 3.1.** Reprezentarea grafică a vectorilor de poziție în cazul mișcării unui corp în dependență de ecuația parametrică vectorială.

Mișcarea corpului solid rigid în raport cu sistemul de referință ales este dată de două funcții dependente de timp [47]:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_Q(t) \in \mathbb{V}_3 \\ \mathbf{R} = \mathbf{R}(t) \in \mathbb{S}\mathbb{O}_3 \end{cases} \quad (3.2)$$

numite ecuațiile parametrice ale mișcării corpului solid rigid. Funcțiile din ecuația (3.2) sunt considerate a fi de două ori derivabile în raport cu variabila  $t$ .

Vom nota în continuare prin  $\mathbf{v}_Q$  viteza absolută și prin  $\mathbf{a}_Q$  accelerația absolută [12] a punctului  $Q$  în sistemul de referință fix  $\{R\}$  [12].

Cu notațiile ce au fost introduse, câmpul vitezelor și accelerațiilor este descris de

$$\begin{cases} \mathbf{v} - \mathbf{v}_Q = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \\ \mathbf{a} - \mathbf{a}_Q = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \end{cases} \quad (3.3)$$

În ecuația (3.3)

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.4)$$

Tensorul vitezei respectiv tensorul accelerației sunt dați de:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \\ \Phi_2 = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \end{cases} \quad (3.5)$$

Tensorul

$$\Phi_1 = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{S}\mathbb{O}_3 \quad (3.6)$$

este tensorul antisimetric asociat vitezei unghiulare instantanee  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{V}_3$ .

Tensorul

$$\Phi_2 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.7)$$

în care  $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  este accelerația unghiulară instantanee a corpului solid rigid [21].

### 3.2 Câmpul vectorial al vitezelor

Câmpul vitezei în mișcarea corpului solid rigid este descris de [10]:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_Q = \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \quad (3.8)$$

Viteza unghiulară instantanee  $\boldsymbol{\omega}$  a corpului solid rigid poate fi determinată ca:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{vect } \Phi_1 \quad (3.9)$$

O proprietate majoră care poate fi evidențiată este că viteza unui punct dat al corpului solid rigid poate fi calculată când se cunoaște tensorul vitezei  $\Phi_1$  și invariantul vectorial al vitezei  $\mathbf{a}_1$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + \Phi_1 \mathbf{r} \quad (3.10)$$

câmpul vitezelor se scrie și sub forma [47]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.11)$$

## 4. STUDIUL ACCELERĂȚILOR DE ORDIN SUPERIOR ÎN MIȘCAREA RIGIDĂ

În acest capitol se extinde câteva din considerațiile precedente către cazul accelerațiilor de ordin superior  $n$ .

### 4.1 Studiul accelerațiilor de ordin superior

#### 4.1.1 Formularea cu grupul Lie a matricelor omogene

Având setul de interdependențe afine  $g: \mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3, g(\mathbf{u}) = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{t}$ , în care  $\mathbf{R}$  este un tensor ortogonal din  $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$  (grupul Lie al tensorilor proprii ortogonali euclideni reali de ordinul al doilea) și  $\mathbf{t}$  un vector din  $\mathbb{V}_3$ , este un grup de compoziție și se numește grupul izometricilor afine sau grupul Lie de deplasări a corpului rigid și se notează  $\mathbb{S}\mathbb{E}_3$  (grupul Lie al deplasărilor corpului solid rigid). Orice mișcare finită a corpului solid rigid poate fi descrisă prin astfel de interdependență. tensorul  $\mathbf{R}$  modelează rotația corpului solid rigid, iar, vectorul  $\mathbf{t}$  translația sa. O interdependență afină din  $\mathbb{S}\mathbb{E}_3$  poate fi reprezentată prin o matrice omogenă pătrată  $4 \times 4$  precum [10]:

$$g = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ecuția vectorială parametrică a mișcării corpului solid rigid poate fi rescrisă cu ajutorul funcție matriciale omogene  $\mathbb{S}\mathbb{E}_3^{\mathbb{R}}$  după cum urmează:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Diferențiind ecuația (4.2) în raport cu timpul obținem

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\mathbf{r}}_Q \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\mathbf{r}}_Q \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

făcând calculele pentru  $n = 1$  obținem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Din ecuația (4.2), prin diferențierea de  $n$  ori în raport cu timpul ne rezultă:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^{[n]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(n)} & \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(n)} & \mathbf{r}_Q^{(n)} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

făcând calculele și considerând ecuațiile (3.4) și (3.5) obținem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^{[n]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_n & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}^* \quad (4.6)$$

Ecuția (4.6) reprezintă o formă unificată de descriere a hiper-stării de ordin  $n$  în mișcarea corpului solid rigid. Matricea:

#### 4.1.2 Formularea cu grupul Lie al tensorilor duali

Având mișcarea corpului rigid dată de următoarea ecuație parametrică în fiecare sistem de referință [12] [10]:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{V}_3 \\ \mathbf{R} = \mathbf{R}(t) \in \mathbb{SO}_3 \end{cases} \quad (4.7)$$

în care  $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  este variabila timp. Vom presupune că funcțiile din ecuațiile (4.7) sunt infinit diferentiabile în raport cu variabila  $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ .

Tensorul ortogonal dual care descrie mișcarea corpului solid rigid,  $\underline{\mathbf{R}} \in \underline{\mathbb{SO}}_3^{\mathbb{R}}$ , este:

$$\underline{\mathbf{R}} = (\mathbf{I} + \varepsilon \tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{R} \quad (4.8)$$

Tensorul ortogonal dual  $\underline{\mathbf{R}}$  transportă vectorii duali din sistemul de referință al corpului în sistemul de referință spațial cu conservarea unghiurilor duale și orientarea relativă a liniilor care corespunde vectorilor duali  $\underline{\mathbf{a}}$  și  $\underline{\mathbf{b}}$ . De asemenea,  $|\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{a}}| = |\underline{\mathbf{a}}|, \forall \underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{V}_3$ .

Viteza unghiulară duală pentru mișcarea corpului rigid (4.8) este dată de:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \text{vect}(\dot{\underline{\mathbf{R}}} \underline{\mathbf{R}}^T) \quad (4.9)$$

#### 4.1.3 Formularea cu grupul Lie al tensorilor și quaternionilor multi-duali

În acest capitol se vor introduce principalele elemente ce definesc algebra multi-duală. Algebra multi-duală este introdusă prin numerele multi-duale, funcția multi-duală, vectorii multi-duali, tensorii multi-duali și respectiv transformarea multi-duală [6], [27], [33], [48].

##### Numerele multi-duale

Fie  $\mathbb{R}$  un set de numere reale și un număr natural  $n \in \mathbb{N}$ . Un set de numere multi-duale este introdus de [36].

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} + \varepsilon \mathbb{R} + \dots + \varepsilon^n \mathbb{R}; \varepsilon \neq 0, \varepsilon^{n+1} = 0 \quad (4.10)$$

Două elemente generice  $\hat{x}, \hat{y} \in \widehat{\mathbb{R}}$  vor avea următoarea formă:

$$\hat{x} = x + x_1 \varepsilon + \dots + x_n \varepsilon^n; x, x_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}, \quad (4.11)$$

$$\hat{y} = y + y_1 \varepsilon + \dots + y_n \varepsilon^n; y, y_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n} \quad (4.12)$$

Vom nota prin  $x = \text{Re} \hat{x}$  partea reală și prin  $\text{Mu} \hat{x} = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon^k$  partea multi-duală a numărului multi-dual  $\hat{x}$ . Respectiv vom nota prin  $x_k = \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon^k}$ ;  $k = \overline{1, n}$ , componentul de ordinal  $k$  al numărului multi-dual  $\hat{x}$  din relația (4.11)

##### Funcția multi-duală

Fie  $f: \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f = f(x)$  o funcție reală derivabilă de  $n$  ori. Vom defini funcția multi-duală  $\hat{f}$  a variabilei multi-duale  $\hat{x}$  prin ecuația [33]:

$$f(\hat{x}) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k}{k!} f^{(k)}(x), \quad (4.13)$$

unde notăm cu  $\Delta = \hat{x} - x = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon^k$ , partea multi-duală a variabilei  $\hat{x}$ .

Datorită formulei multinomiale:

$$\Delta^k = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots + k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \varepsilon^{k_1+2k_2+\dots+nk_n} \quad (4.14)$$

și  $\Delta^p = 0, p \geq n + 1$ , Ec. (4.13) devine:

$$f(\hat{x}) = f(x) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, x_1, x_2, \dots, x_k) \varepsilon^k, \quad (4.15)$$

unde funcțiile cu variabile reale  $\varphi_k$  au următoarea formă:

$$\varphi_k = g_1 f'(x) + g_2 f''(x) + \dots + g_k f^{(k)}(x), \quad (4.16)$$

unde  $g_k, k = \overline{1, n}$  sunt funcțiile omogene de gradul  $k$  cu variabile:  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

În ecuația (4.15), vom nota  $\varphi_k = \frac{df(\hat{x})}{d\varepsilon^k}$ ;  $k = \overline{1, n}$ .

#### Vectori multi-duali

Setul de vectori multi-duali este introdus prin [9]:

$$\widehat{\mathbb{V}}_3 = \mathbb{V}_3 + \varepsilon \mathbb{V}_3 + \dots + \varepsilon^n \mathbb{V}_3; \varepsilon \neq 0, \varepsilon^{n+1} = 0. \quad (4.17)$$

Doi vectori generici din  $\widehat{\mathbb{V}}_3$  vor fi scriși după cum urmează:

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_1 \varepsilon + \dots + \mathbf{a}_n \varepsilon^n; \mathbf{a}, \mathbf{a}_k \in \mathbb{V}_3, \quad (4.18)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \mathbf{b}_1 \varepsilon + \dots + \mathbf{b}_n \varepsilon^n; \mathbf{b}, \mathbf{b}_k \in \mathbb{V}_3. \quad (4.19)$$

#### Tensori multi-duali

O aplicație liniară- $\widehat{\mathbb{R}}$  a lui  $\widehat{\mathbb{V}}_3$  în  $\widehat{\mathbb{V}}_3$  se numește tensor Euclidian multi-dual [33]:

$$\mathbf{T}(\hat{\lambda}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\lambda}_2 \hat{\mathbf{v}}_2) = \hat{\lambda}_1 \mathbf{T}(\hat{\mathbf{v}}_1) + \hat{\lambda}_2 \mathbf{T}(\hat{\mathbf{v}}_2); \forall \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \in \widehat{\mathbb{R}}; \forall \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2 \in \widehat{\mathbb{V}}_3. \quad (4.20)$$

Considerând grupul Lie al tensorilor Euclidieni multi-duali ortogonali  $\widehat{\mathbb{S}}\widehat{\mathbb{O}}_3$  definit prin:

$$\widehat{\mathbb{S}}\widehat{\mathbb{O}}_3 = \{\widehat{\mathbf{R}} \in \mathbb{L}(\widehat{\mathbb{V}}_3, \widehat{\mathbb{V}}_3); \widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{R}}^T = \widehat{\mathbf{I}}, \det \widehat{\mathbf{R}} = 1\}. \quad (4.21)$$

Se poate arăta că pentru orice tensor multi-dual ortogonal următoarea reprezentare are loc:

$$\widehat{\mathbf{R}} = \widehat{\mathbf{I}} + \sin \hat{\alpha} \widehat{\mathbf{u}} + (1 - \cos \hat{\alpha}) \widehat{\mathbf{u}}^2. \quad (4.22)$$

In ecuația (4.22)  $\hat{\alpha}$  este unghiul multi-dual,  $\text{Re} \hat{\alpha} \in [0, 2\pi)$ , și  $\widehat{\mathbf{u}}$  este versorul multi-dual,  $\widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} = 1$

#### Quaternioni multi-duali

Considerându-se suma directă a modulelor  $\widehat{\mathbb{R}}$  ale lui  $\widehat{\mathbb{R}}$  și  $\widehat{\mathbb{V}}_3$ , notată prin  $\widehat{\mathbb{Q}} = \widehat{\mathbb{R}} \oplus \widehat{\mathbb{V}}_3$ . Un element

generic al lui  $\hat{\mathbb{Q}}$  este scris formal astfel [49]:

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{q} + \hat{\mathbf{q}}; \hat{q} \in \hat{\mathbb{R}}, \hat{\mathbf{q}} \in \hat{\mathbb{V}}_3 \quad (4.23)$$

Produsul a două elemente  $\hat{\mathbf{q}}_1 = \hat{q}_1 + \hat{\mathbf{q}}_1$  și  $\hat{\mathbf{q}}_2 = \hat{q}_2 + \hat{\mathbf{q}}_2$  este definit de către:

$$\hat{\mathbf{q}}_1 \hat{\mathbf{q}}_2 = (\hat{q}_1 \hat{q}_2 - \hat{\mathbf{q}}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_2) + (\hat{q}_1 \hat{\mathbf{q}}_2 + \hat{q}_2 \hat{\mathbf{q}}_1 + \hat{\mathbf{q}}_1 \times \hat{\mathbf{q}}_2) \quad (4.24)$$

#### *Transformare diferențială multi-duală*

Această secțiune introduce o transformare care asociază o funcție hiper-complexă a unei variabile reale cu o funcție reală a unei variabile reale. Această transformare permite determinarea simultană a câmpurilor vectoriale de accelerație de ordin superior pentru o anumită mișcare a corpului solid rigid [33], [27].

Dacă considerăm  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f = f(t)$ , o funcție reală a variabilei timp reale, de  $n \in \mathbb{N}$  ori derivabilă. Acestei funcții i se va asocia funcția multi-duală a variabilei reale  $\check{f}$  dată de ecuația:

$$\check{f} = f + \varepsilon \dot{f} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}. \quad (4.25)$$

**Demonstrația 4.1.** Se folosesc proprietățile algebrei multi-duale și relația de mai jos:

$$\check{f} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} f, \quad (4.26)$$

unde  $e^{\varepsilon \mathbb{D}} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbb{D} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbb{D}^n$  cu  $\mathbb{D} = \frac{d}{dt}$  operatorul de derivare în raport cu timpul.

#### *Cinematică de ordin superior utilizând transformarea multi-duală*

Dacă considerăm o mișcare rigidă dată printr-o curbă din grupul Lie a deplasărilor solid rigide  $\mathbb{S}\mathbb{E}_3$ , descrisă de matricea omogenă  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$  în care  $\mathbf{R} \in \mathbb{S}\mathbb{O}_3$  este un tensor ortogonal propriu [12], [34],  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ , și vectorul  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  fiind funcția vectorială a unei variabile de timp. Precum se descrie în [33], [35], câmpul hiper-stării este dat prin matricea:

$$\Psi_n = \begin{bmatrix} \Phi_n & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$\Phi_n$  și  $\mathbf{a}_n$  au forma:

$$\Phi_n = \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{R}^T, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{r}^{(n)} - \Phi_n \mathbf{r}. \quad (4.29)$$

Accelerația de ordinul  $n$  pentru un punct al corpului solid rigid dat prin vectorul poziției  $\mathbf{r}$ , notată în continuare prin  $\mathbf{a}_r^{[n]}$ , se poate determina prin:

$$\mathbf{a}^{[n]} = \mathbf{a}_n + \Phi_n \mathbf{r}; n \in \mathbb{N}. \quad (4.30)$$

În continuare, va fi descrisă o metodă non-iterativă ce permite obținerea câmpului de accelerație de ordin superior utilizând transformata diferențială multi-duală.

Deci, pentru  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) \in \mathbb{SO}_3$  și  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{V}_3; \forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , poate fi definit:

$$\tilde{\mathbf{R}} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} \mathbf{R} = \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\varepsilon + \cdots + \frac{\mathbf{R}^{(n)}}{n!} \varepsilon^n, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} \mathbf{r} = \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}\varepsilon + \cdots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}}{n!} \varepsilon^n, n \in \mathbb{N}^* \quad (4.32)$$

Dacă  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha, \mathbf{u})$  unde unghiul  $\alpha$  și vectorul unitar  $\mathbf{u}$  sunt invarianții naturali a lui  $\mathbf{R}$ , o relație similară formulei lui Rodrigues are loc [49]:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I} + \sin \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{u}} + (1 - \cos \tilde{\alpha}) \tilde{\mathbf{u}}^2, \quad (4.33)$$

unde

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \dot{\alpha}\varepsilon + \cdots + \frac{\alpha^{(n)}}{n!} \varepsilon^n, \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}\varepsilon + \cdots + \frac{\mathbf{u}^{(n)}}{n!} \varepsilon^n. \quad (4.35)$$

#### 4.1.4 Formularea cu grupul Lie al tensorilor și quaternionilor hiper-multi-duale

Fie mulțimea numerelor duale

$$\underline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} + \varepsilon_0 \mathbb{R}; \varepsilon_0 \neq 0, \varepsilon_0^2 = 0, \quad (4.36)$$

și un număr natural  $n \in \mathbb{N}$ . Mulțimea numerelor hiper-multi-duale (HMD) este introdusă de:  $\widehat{\underline{\mathbb{R}}} = \underline{\mathbb{R}} + \varepsilon \underline{\mathbb{R}} + \cdots + \varepsilon^n \underline{\mathbb{R}}; \varepsilon \neq 0, \varepsilon^{n+1} = 0$ . În cazul în care  $n = 1$ , ne rezultă numerele hiper-duale. Două elemente generice  $\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{y}} \in \widehat{\underline{\mathbb{R}}}$  vor fi scrise precum:

$$\underline{\hat{x}} = \underline{x} + \underline{x}_1 \varepsilon + \cdots + \underline{x}_n \varepsilon^n; \underline{x}_k \in \underline{\mathbb{R}}, k = \overline{1, n}, \quad (4.37)$$

$$\underline{\hat{y}} = \underline{y} + \underline{y}_1 \varepsilon + \cdots + \underline{y}_n \varepsilon^n; \underline{y}_k \in \underline{\mathbb{R}}, k = \overline{1, n}. \quad (4.38)$$

Prin  $\underline{x} = \text{Du}\underline{\hat{x}}$  și  $\text{Mu}\underline{\hat{x}} = \sum_{k=1}^n \underline{x}_k \varepsilon^k$  sau notat părțile duale și respectiv cele multi-duale a numărului HMD  $\underline{\hat{x}}$ . Prin  $\underline{x}_k = \frac{d\underline{\hat{x}}}{d\varepsilon^k}; k = \overline{1, n}$  sa notat componenta duală de ordin  $k$  a numărului HMD  $\underline{\hat{x}}$ , avem  $\widehat{\underline{\mathbb{R}}} = \widehat{\underline{\mathbb{R}}} + \varepsilon_0 \widehat{\underline{\mathbb{R}}}$ .

Fie  $f: \underline{\mathbb{I}} \subseteq \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}, f = f(\underline{x})$ , o funcție duală diferențiabilă de  $n$  ori. Funcția HMD  $\hat{f}$  a variabilei HMD  $\underline{\hat{x}}$  este definită prin ecuația:

$$\hat{f}(\underline{\hat{x}}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{(\Delta \underline{\hat{x}})^k}{k!} f^{(k)}(\underline{x}). \quad (4.39)$$

În care sa notat prin  $\Delta \underline{\hat{x}}: \Delta \underline{\hat{x}} = \underline{\hat{x}} - \underline{x} = \sum_{k=1}^n \underline{x}_k \varepsilon^k$ , cu  $(\Delta \underline{\hat{x}})^p = 0; p \geq n + 1$ .

Un set de quaternioni HMD poate fi definit ca un produs direct al modulului de numere HMD și al modulului unui set de vectori HMD:  $\underline{\mathbb{Q}} = \underline{\mathbb{R}} \oplus \underline{\mathbb{V}}_3$ . Un quaternion HMD generic este o pereche formată dintr-o mărime scalară HMD și un vector HMD [49]:

$$\underline{\hat{q}} = (\underline{\hat{q}}, \underline{\hat{\mathbf{q}}}), \underline{\hat{q}} \in \underline{\mathbb{R}}, \underline{\hat{\mathbf{q}}} \in \underline{\mathbb{V}}_3, \quad (4.40)$$

Setul de quaternioni HMD  $\underline{\mathbb{Q}}$  este un modul  $\underline{\mathbb{R}}$  de rang patru, considerând adunarea și operațiile de înmulțire a quaternionilor HMD cu numerele HMD.

Produsul a doi quaternioni HMD  $\underline{\hat{q}}_1 = (\underline{\hat{q}}_1, \underline{\hat{\mathbf{q}}}_1)$  și  $\underline{\hat{q}}_2 = (\underline{\hat{q}}_2, \underline{\hat{\mathbf{q}}}_2)$  sunt definiți de către:

$$\underline{\hat{q}}_1 \underline{\hat{q}}_2 = (\underline{\hat{q}}_1 \cdot \underline{\hat{q}}_2 - \underline{\hat{\mathbf{q}}}_1 \cdot \underline{\hat{\mathbf{q}}}_2, \quad \underline{\hat{\mathbf{q}}}_1 \underline{\hat{q}}_2 + \underline{\hat{q}}_2 \underline{\hat{\mathbf{q}}}_1 + \underline{\hat{\mathbf{q}}}_1 \times \underline{\hat{\mathbf{q}}}_2). \quad (4.41)$$

Conform ecuației (4.41), modulul  $\underline{\mathbb{R}}$  al lui  $\underline{\mathbb{Q}}$  este o algebră duală liniară asociativă, necomutativă, de ordinul patru, peste inelul numerelor HMD  $\underline{\mathbb{R}}$ . În cazul oricărui quaternion HMD dat prin Ecuația (4.40), se definește: conjugatul notat  $\underline{\hat{q}}^* = (\underline{\hat{q}}, -\underline{\hat{\mathbf{q}}})$  și norma notată  $|\underline{\hat{q}}|^2 = \underline{\hat{q}} \underline{\hat{q}}^*$ . Dacă  $|\underline{\hat{q}}|^2 = 1$ , quaternionul HMD este numit quaternion HMD unitar.

Numărul HMD  $\underline{\hat{\alpha}}$  și vectorul HMD unitar  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  există așa încât:

$$\underline{\hat{q}} = \cos \frac{\underline{\hat{\alpha}}}{2} + \underline{\hat{\mathbf{u}}} \sin \frac{\underline{\hat{\alpha}}}{2} = \exp \left( \frac{\underline{\hat{\alpha}}}{2} \underline{\hat{\mathbf{u}}} \right), \quad (4.42)$$

unde  $\underline{\hat{\alpha}}$  și  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  sunt invariante HMD naturali ai mișcării corpului solid rigid [49].

*Transformarea diferențială multi-duală și cinematica de ordin superior prin quaternioni HMD.*

Calculul este considerabil simplificat considerând parametrizarea mișcării corpului solid rigid prin funcția în raport cu timpul a quaternionului dual:  $\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}(t) \in \underline{\mathbb{U}}, \forall t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\underline{\mathbf{q}} = \exp \left( \frac{1}{2} \underline{\alpha} \underline{\mathbf{u}} \right) = \cos \frac{1}{2} \underline{\alpha} + \underline{\mathbf{u}} \sin \frac{1}{2} \underline{\alpha}. \quad (4.43)$$

Fie  $\underline{\check{q}}$  quaternionul HMD unitar obținut prin transformarea diferențială dată de ecuația (4.43) și Error! Reference source not found. [49]:

$$\underline{\check{q}} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} \underline{\mathbf{q}} = \cos \frac{1}{2} \underline{\check{\alpha}} + \underline{\check{\mathbf{u}}} \sin \frac{1}{2} \underline{\check{\alpha}} \quad (4.44)$$

și quaternionul HMD unitar:

$$\underline{\hat{\phi}} = \underline{\check{q}} \underline{\mathbf{q}}^*. \quad (4.45)$$

În cazul mișcării rigide elicoidale ( $\underline{\check{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{u}}$ ), rezultă:

$$\underline{\hat{\phi}} = \underline{\check{q}} \underline{\mathbf{q}}^* = \exp \left[ \frac{1}{2} \Delta \underline{\check{\alpha}} \underline{\mathbf{u}} \right] = \cos \left[ \frac{1}{2} \Delta \underline{\check{\alpha}} \right] + \underline{\mathbf{u}} \sin \left[ \frac{1}{2} \Delta \underline{\check{\alpha}} \right]. \quad (4.46)$$

Conform ecuației (4.46), quaternionul HMD unitar  $\underline{\hat{\phi}}$  are forma:

$$\underline{\hat{\varphi}} = \hat{\varphi} + \varepsilon_0 \hat{\varphi}_0 \quad (4.47)$$

În ecuația (4.47),  $\hat{\varphi}$  și  $\hat{\varphi}_0$  sunt quaternioni MD [49].

Decompoziția unică pentru rezultatul quaternionului unitar HMD este:

$$\underline{\hat{\varphi}} = \left(1 + \varepsilon_0 \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}\right) \hat{\varphi}, \quad (4.48)$$

$$\hat{\Phi} = \theta(\hat{\varphi}), \quad (4.49)$$

unde  $\theta: \widehat{\mathbb{U}} \rightarrow \widehat{\mathbb{SO}}_3$  este un homomorfism, similar cu cel din Error! Reference source not found..

Conform ecuației (4.48) rezultă:

$$\hat{\mathbf{a}} = 2 \frac{d}{d\varepsilon_0} (\underline{\hat{\varphi}}) \hat{\varphi}^* = 2 \hat{\varphi}_0 \hat{\varphi}^* \quad (4.50)$$

*Formula produsului exponențial quaternionic pentru cinematica de ordin superior a lanțurilor cinematice de perechi inferioare.*

Fie un lanț cinematic spațial serial de perechi inferioare, format din  $(m+1)$  corpuri rigide  $C_k, k = \overline{0, m}$ . Mișcarea corpului solid rigid  $C_k$  în raport cu reperul atașat corpului  $C_{k-1}$  este dată prin quaternionul dual unitar  ${}^{k-1}\underline{\mathbf{q}}_k, k = \overline{1, m}$  (Fig.3). Proprietățile mișcării relative ale corpului solid rigid  $C_k, k = \overline{1, m}$ , în raport cu reperul atașat corpului rigid  $C_0$ , sunt obținute prin quaternionul dual unitar [49].

$$\underline{\mathbf{q}}_k = {}^0\underline{\mathbf{q}}_1 {}^1\underline{\mathbf{q}}_2 \dots {}^{k-1}\underline{\mathbf{q}}_k, \quad (4.51)$$

$$\underline{\mathbf{q}}_k = \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_1 {}^0\underline{\mathbf{u}}_1\right] \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_2 {}^1\underline{\mathbf{u}}_2\right] \dots \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_k {}^{k-1}\underline{\mathbf{u}}_k\right]. \quad (4.52)$$

Pentru corpul terminal al lanțului cinematic spațial serial cu perechi inferioare (**Error! Reference source not found.**), proprietățile mișcării relative față de sistemul de referință atașat corpului solid rigid  $C_0$  sunt date de quaternionul dual unitar [49].

$$\underline{\mathbf{q}}_m = {}^0\underline{\mathbf{q}}_1 {}^1\underline{\mathbf{q}}_2 \dots {}^{m-1}\underline{\mathbf{q}}_m, \quad (4.53)$$

$$\underline{\mathbf{q}}_m = \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_1 {}^0\underline{\mathbf{u}}_1\right] \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_2 {}^1\underline{\mathbf{u}}_2\right] \dots \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_m {}^{m-1}\underline{\mathbf{u}}_m\right] \quad (4.54)$$

Dacă vectorii dual unitari  ${}^{k-1}\underline{\mathbf{u}}_k = \text{const}, k = \overline{1, m}$ , lanțul cinematic spațial este numit manipulator spațial general de perechi inferioare. Unghiurile duale  $\underline{\alpha}_k, k = \overline{1, m}$ :

$$\underline{\alpha}_k = \alpha_k(t) + \varepsilon_0 d_k(t), t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \quad (4.55)$$

reprezintă mișcarea corpului solid rigid  $C_k$  în raport cu reperul atașat corpului solid rigid  $C_{k-1}$ . Funcțiile dependente de timp  $\underline{\alpha}_k, k = \overline{1, m}$ , trebuie să fie de  $n$  ori derivabile,  $\forall t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ . Prin urmare următoarea teoremă poate fi demonstrată:

**Teorema 4.1.** *Câmpurile vectoriale ale accelerației de ordin superior ale corpului terminal din lanțul cinematic spațial cu perechi inferioare, date de funcția cinematică (4.54), rezultă din formula produsului exponențial al quaternionilor unitari HMD [49]:*

$$\underline{\hat{\phi}}_m = \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_1 \Delta \underline{\check{\alpha}}_1 \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_2 \Delta \underline{\check{\alpha}}_2 \right] \dots \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_m \Delta \underline{\check{\alpha}}_m \right], \quad (4.56)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_1 = {}^0 \underline{\mathbf{u}}_1, \quad (4.57)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_k = \mathbf{Ad}_{\mathbf{q}_{k-1}} ({}^{k-1} \underline{\mathbf{u}}_k), k = \overline{2, m}, \quad (4.58)$$

unde  $\underline{\mathbf{q}}_{k-1}$  este dat de ecuația (4.53),  $\underline{\mathbf{u}}_k, k = \overline{1, m}$ , sunt vectori duali unitari care reprezintă articulația de rototranslație  $k$ , iar  $\Delta \underline{\check{\alpha}}_k$  reprezintă partea HMD a variabilelor HMD din articulație  $\underline{\check{\alpha}}_k, k = \overline{1, m}$ .

Hiper-starea corpului terminal, descrisă în reperul atașat corpului  $C_m$ , este exprimat prin quaternionul HMD.

$$\underline{\hat{\phi}}_m^B = \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_1^B \Delta \underline{\check{\alpha}}_1 \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_2^B \Delta \underline{\check{\alpha}}_2 \right] \dots \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_m^B \Delta \underline{\check{\alpha}}_m \right], \quad (4.59)$$

unde versorul dual  $\underline{\mathbf{u}}_k^B, k = \overline{1, m}$ :

$$\underline{\mathbf{u}}_k^B = \mathbf{Ad}_{[\mathbf{q}_{k-1}^k \mathbf{q}_{k+1}^k \dots \mathbf{q}_m^k]^*} ({}^{k-1} \underline{\mathbf{u}}_k). \quad (4.60)$$

sunt vectori duali unitari care reprezintă articulația de rototranslație  $k$ , calculată în reperul corpului  $C_m$ .

Funcțiile  $\exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_k \Delta \underline{\check{\alpha}}_k \right], \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_k^B \Delta \underline{\check{\alpha}}_k \right], k = \overline{1, m}$ , nu sunt transcendente ci polinomiale, considerând că  $(\Delta \underline{\check{\alpha}}_k)^p = 0; p \geq n + 1$ . [49]

## 5. STUDIUL ACCELERAȚIILOR DE ORDIN SUPERIOR A SISTEMELOR MULTI-CORP

În acest capitol se extinde câteva din considerațiile precedente către cazul accelerațiilor de ordin superior  $n$ .

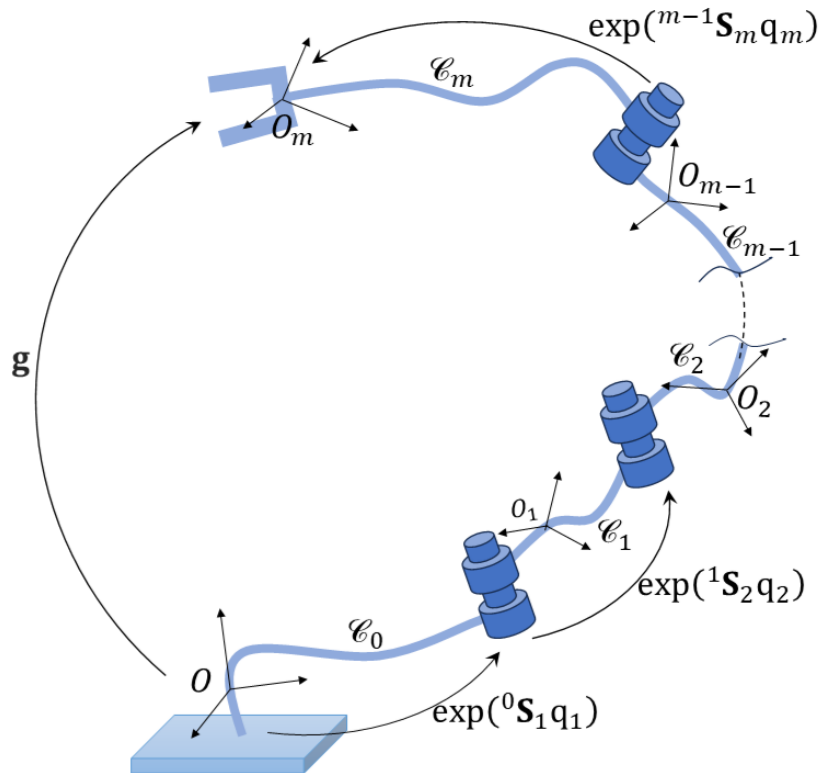
### 5.1 Sisteme multi-corp seriale

#### 5.1.1 Formularea de tip Brockett cu matricelor omogene. Cazul Iacobienilor seriali

Luând în considerare un lanț cinematic de perechi inferioare descris prin interdependența cinematică [49]:

$$\mathbf{g} = f_m(\mathbf{q}) = \exp({}^0\mathbf{S}_1 q_1) \exp({}^1\mathbf{S}_2 q_2) \dots \exp({}^{m-1}\mathbf{S}_m q_m), m \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ , cunoscută și sub denumirea de formulă Brockett.



**Figura 5.1.** Mișcarea relativă a corpului terminal  $C_m$  în raport cu reperul  $C_0$ .

În ecuația (5.1),  ${}^{k-1}\mathbf{S}_k, k = \overline{1, m}$ , denotă coordonatele vectorilor de rototranslație a corpului  $C_k$  în sistemul de referință atașat corpului  $C_{k-1}$ , și  $q_k, k = \overline{1, m}$  denotă variabila articulației [36], [33]. Funcția reală  $q_k = q_k(t), t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}, k = \overline{1, m}$ , se consideră a fi de  $n$  ori derivabilă.

Utilizând transformata multi-duală și proprietățile acestora, se poate determina simultan, câmpurile vectoriale de accelerație de ordin superior pentru corpul terminal al lanțului cinematic dat de ecuația cinematică (5.1).

#### 5.1.2 Formularea de tip Brockett cu grupul Lie al tensorilor duali

Dacă considerăm un sistem spațial din mai multe corpuri  $m + 1, C_k, k = \overline{0, m}$  (**Error! Reference source not found.**) unde mișcarea relativă a corpului rigid  $C_k$  în raport cu  $C_{k-1}$  este dată de tensorul ortogonal dual propriu  ${}^{k-1}\mathbf{R}_k \in \underline{\mathbb{SO}}_3^{\mathbb{R}}$ . Proprietățile de mișcare relativă ale corpului  $C_m$  în raport cu  $C_0$  sunt descrise de tensorul ortogonal dual [12]:

$$\underline{\mathbf{R}} = {}^0\underline{\mathbf{R}}_1 \cdot {}^1\underline{\mathbf{R}}_2 \dots {}^{m-1}\underline{\mathbf{R}}_m \quad (5.2)$$

### 5.1.3 Formularea de tip Brockett cu grupul Lie al tensorilor multi-duali

Considerând un lanț cinematic serial spațial, alcătuit din  $(n+1)$  corpuri solid rigide  $C_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , descris prin funcția cinematică (formula POE Brockett) [49]:

$$g = f_m(\mathbf{q}) = \exp({}^0\mathbf{S}_1 q_1) \exp({}^1\mathbf{S}_2 q_2) \dots \exp({}^{n-1}\mathbf{S}_n q_n), n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

în care  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ . Termenul  ${}^{k-1}\mathbf{S}_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  din ecuația (5.4), reprezintă vectorii coordonatelor de rototranslație ai corpului  $C_k$ , analizați în cadrul de referință al corpului  $C_{k-1}$ , iar  $q_k = q_k(t)$   $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , reprezintă variabila din articulație, de două ori derivabilă. Aplicând transformata diferențială multiduală relației (5.3) și ținând cont că  ${}^{k-1}\mathbf{S}_k = \text{const}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , rezultă [49]:

### 5.1.4 Formularea de tip Brockett cu grupul Lie al tensorilor hiper-multi-duali

Mișcarea unui corp solid rigid este dată de o curbă de parametrizare temporală în grupul Lie al tensorului dual ortogonal  $\underline{\mathbb{S}\mathbb{O}}_3$ . Astfel, pentru  $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{R}}(t) \in \underline{\mathbb{S}\mathbb{O}}_3, \forall t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ , tensorul dual ortogonal, diferentiabil de  $n$  ori, poate fi definit prin tensorul HMD [4]:

$$\underline{\check{\mathbf{R}}} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{R}} + \underline{\dot{\mathbf{R}}}\varepsilon + \dots + \frac{\underline{\mathbf{R}}^{(n)}}{n!} \varepsilon^n. \quad (5.4)$$

Dacă  $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{R}}(\underline{\alpha}, \underline{\mathbf{u}})$ , unde unghiul dual  $\underline{\alpha}$  și vectorul dual unitar  $\underline{\mathbf{u}}$  sunt invarianții naturali pentru  $\underline{\mathbf{R}}$ , următoarea formulă de formă Rodrigues are loc [28]:

$$\underline{\check{\mathbf{R}}} = \mathbf{I} + (\sin \underline{\check{\alpha}}) \underline{\check{\mathbf{u}}} + (1 - \cos \underline{\check{\alpha}}) \underline{\check{\mathbf{u}}}^2 = \exp(\underline{\check{\alpha}} \underline{\check{\mathbf{u}}}), \quad (5.5)$$

unde:

$$\underline{\check{\alpha}} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} \underline{\alpha} = \underline{\alpha} + \underline{\dot{\alpha}}\varepsilon + \dots + \frac{\underline{\alpha}^{(n)}}{n!} \varepsilon^n, \quad (5.6)$$

$$\underline{\check{\mathbf{u}}} = e^{\varepsilon \mathbb{D}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}} + \underline{\dot{\mathbf{u}}}\varepsilon + \dots + \frac{\underline{\mathbf{u}}^{(n)}}{n!} \varepsilon^n. \quad (5.7)$$

Tensorul HMD ortogonal [49]:

$$\underline{\hat{\Psi}} = \underline{\check{\mathbf{R}}} \underline{\mathbf{R}}^T = (\mathbf{I} + \varepsilon_0 \underline{\hat{\mathbf{a}}}) \underline{\hat{\Phi}}, \quad (5.8)$$

corespunzător izomorfismului matricei multi-duale omogene  $\underline{\hat{\Psi}} = \underline{\check{\mathbf{g}}}\underline{\mathbf{g}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\Phi}} & \underline{\hat{\mathbf{a}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ , care surprinde în totalitate informațiile accelerațiilor de ordinul  $k = \overline{1, n}$ :

$$\underline{\hat{\Phi}} = \mathbf{I} + \underline{\Phi}_1 \varepsilon + \dots + \frac{\underline{\Phi}_n}{n!} \varepsilon^n, \quad (5.9)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_1 \varepsilon + \frac{\mathbf{a}_2}{2} \varepsilon^2 \dots + \frac{\mathbf{a}_n}{n!} \varepsilon^n. \quad (5.10)$$

Vectorul multi-dual:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} \triangleq \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{a}_{\mathbf{r}}^{[1]} + \dots + \frac{\mathbf{a}_{\mathbf{r}}^{[n]}}{n!} \varepsilon^n, \quad (5.11)$$

$\mathbf{a}_{\mathbf{r}}^{[n]}$  reprezintă accelerația de ordinul  $n$  calculată cu Ecuația (4.30). Din Ecuația (4.30) și ecuațiile (5.9)-(5.11) rezultă o ecuație concisă [49]:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{a}} + \hat{\Phi} \mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{V}_3. \quad (5.12)$$

Ecuația (5.9) reprezintă o reprezentare multi-duală a câmpului vectorial al cinematicii de ordin superior [49].

Dacă  $\underline{\mathbf{u}} = \text{const}$  ( $\underline{\tilde{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{u}}$ ) obținem:

$$\underline{\Psi} = \underline{\tilde{\mathbf{R}}} \underline{\mathbf{R}}^T = \exp(\underline{\alpha} \underline{\tilde{\mathbf{u}}}) \exp(-\underline{\alpha} \underline{\tilde{\mathbf{u}}}) = \exp[(\Delta \underline{\alpha}) \underline{\tilde{\mathbf{u}}}]. \quad (5.13)$$

Din (5.13) rezultă:

$$\underline{\Psi} = \mathbf{I} + (\sin \Delta \underline{\alpha}) \underline{\tilde{\mathbf{u}}} + (1 - \cos \Delta \underline{\alpha}) \underline{\tilde{\mathbf{u}}}^2. \quad (5.14)$$

Mișcarea corpului terminal  $C_m$  în raport cu reperul atașat corpului  $C_0$  este descrisă prin tensorul dual ortogonal [49]:

$$\underline{\mathbf{R}} = {}^0 \underline{\mathbf{R}}_1 {}^1 \underline{\mathbf{R}}_2 \dots {}^{m-1} \underline{\mathbf{R}}_m, \quad (5.15)$$

$$\underline{\mathbf{R}} = \exp(\underline{\alpha}_1 {}^0 \underline{\tilde{\mathbf{u}}}_1) \exp(\underline{\alpha}_2 {}^1 \underline{\tilde{\mathbf{u}}}_2) \dots \exp(\underline{\alpha}_m {}^{m-1} \underline{\tilde{\mathbf{u}}}_m). \quad (5.16)$$

Dacă versorii duali  ${}^{k-1} \underline{\mathbf{u}}_k = \text{const}$ ,  $k = \overline{1, m}$ , lanțul cinematic spațial este denumit manipulator spațial general de perechi inferioare. Unghiurile duale  $\underline{\alpha}_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ :

$$\underline{\alpha}_k = \alpha_k(t) + \varepsilon_0 d_k(t), t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \quad (5.17)$$

descrie mișcarea relativă a corpului solid rigid  $C_k$  în raport cu reperul atașat corpului solid rigid  $C_{k-1}$ . Legătura dintre corpurile solid rigide  $C_k$  și  $C_{k-1}$  este o articulație cilindrică generală  $C$ . Funcțiile în raport cu timpul  $\underline{\alpha}_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , trebuie să fie  $n$  ori derivabile,  $\forall t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ . [49]

## 6. APLICAȚII ÎN CAZUL ROBOȚILOR SERIALI ȘI PARALELI

### 6.1 Calculul derivatelor de ordinul 1, 2 și 3 a matricei Jacobiene folosind algebra multi-duală pentru un robot 2R

Controlul exact al corpului terminal al robotului este necesar în robotica modernă pentru a obține o precizie bună. Cinematica manipulatorului în serie stabilește legătura crucială între variabilele din articulații în coordonatele spațiului articulațiilor și configurația corpului final în coordonatele spațiului de lucru. Când diferențiem direct funcția cinematică, obținem o matrice Jacobiană. Matricea Jacobiană, notată cu  $J$ , codifică sensibilitatea mișcării corpului final în raport cu modificările variabilelor din articulații, ne permite să determinăm modul în care modificările vitezelor din articulații afectează mișcarea corpului final [30]. Pentru a obține o urmărire precisă a traiectoriei, este esențial să se calculeze derivatele matricei Jacobiene de ordin superior. În această secțiune sunt prezentate derivatele de ordinul 1, 2 și 3 a matricei Jacobiene în software-ul Maple folosind algebra multi-duală. Se va considera următorul Jacobian al robotului format din 2 corpuri seriale [48]:

$$J = \begin{pmatrix} -L_2 \sin[\theta_1 + \theta_2] - L_1 \sin[\theta_1] & -L_2 \sin[\theta_1 + \theta_2] \\ L_2 \cos[\theta_1 + \theta_2] - L_1 \cos[\theta_1] & L_2 \cos[\theta_1 + \theta_2] \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Folosind funcția sinus și cosinus multiduală și rearanjarea expresiei în funcție de ordinul  $\varepsilon$ , se obține reprezentarea multi-duală a matricei Jacobiene. Forma multi-duală ne permite să exprimăm nu numai derivatele de ordinul întâi (viteza), ci și derivatele de ordin superior (acelerație, accelerația de ordinul 2, etc.), următoarele ecuații surprind derivatele de ordin superior ale Jacobianului, oferind o înțelegere cuprinzătoare a cinematicii robotului [29].

Utilizând algebra multiduală, obținem valoarea exactă a [29]:

- **Jacobianului** (toți termenii fără  $\varepsilon$ ):

$$J = \begin{pmatrix} -L_2 \sin[\theta_1 + \theta_2] - L_1 \sin[\theta_1] & -L_2 \sin[\theta_1 + \theta_2] \\ L_2 \cos[\theta_1 + \theta_2] - L_1 \cos[\theta_1] & L_2 \cos[\theta_1 + \theta_2] \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

- **Prima derivată a Jacobianului** (toți termenii cu  $\varepsilon$ ):

$$\dot{J} = \begin{pmatrix} -L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos[\theta_1 + \theta_2] - L_1 \dot{\theta}_1 \cos[\theta_1] & -L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos[\theta_1 + \theta_2] \\ -L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin[\theta_1 + \theta_2] + L_1 \dot{\theta}_1 \sin[\theta_1] & -L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin[\theta_1 + \theta_2] \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

- **A doua derivată a Jacobianului** (toți termenii cu  $\varepsilon^2$ ):

$$\ddot{J} = \begin{pmatrix} \ddot{J}_{11} & \ddot{J}_{12} \\ \ddot{J}_{21} & \ddot{J}_{22} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\ddot{J}_{11} = L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin[\theta_1 + \theta_2] - L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos[\theta_1 + \theta_2] - L_1(\ddot{\theta}_1 \cos[\theta_1] - \dot{\theta}_1^2 \sin[\theta_1]) \quad (6.5)$$

$$\ddot{J}_{12} = L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin[\theta_1 + \theta_2] - L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos[\theta_1 + \theta_2] \quad (6.6)$$

$$\ddot{j}_{21} = -L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos[\theta_1 + \theta_2] - L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin[\theta_1 + \theta_2] + L_1(\ddot{\theta}_1 \sin[\theta_1] + \dot{\theta}_1^2 \cos[\theta_1]) \quad (6.7)$$

$$\ddot{j}_{22} = -L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos[\theta_1 + \theta_2] - L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin[\theta_1 + \theta_2] \quad (6.8)$$

- **A treia derivată a Jacobianului** (toți termenii cu  $\varepsilon^3$ )

$$\ddot{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} \ddot{j}_{11} & \ddot{j}_{12} \\ \ddot{j}_{21} & \ddot{j}_{22} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{j}_{11} = & \{L_1(\dot{\theta}_1^3 - \ddot{\theta}_1) + L_2(\dot{\theta}_1^3 + 3\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^3 - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \cos[\theta_2] \\ & + 3L_2(\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2) \sin[\theta_2]\} \cos[\theta_1] \\ & + \{3L_1\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 - L_2(\dot{\theta}_1^3 + 3\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^3 - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \sin[\theta_2] \\ & + 3L_2(\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2) \cos[\theta_2]\} \sin[\theta_1] \end{aligned} \quad (6.10)$$

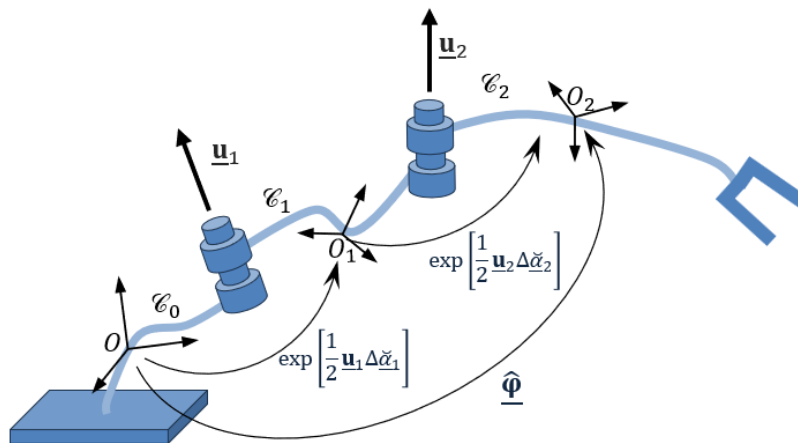
$$\begin{aligned} \ddot{j}_{12} = & L_2(\dot{\theta}_1^3 + 3\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^3 - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \cos[\theta_1 + \theta_2] \\ & + 3L_2(\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2) \sin[\theta_1 + \theta_2] \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{j}_{21} = & \{L_1(-\dot{\theta}_1^3 + \ddot{\theta}_1) + L_2(\dot{\theta}_1^3 + 3\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^3 - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \cos[\theta_2] \\ & + 3L_2(\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2) \sin[\theta_2]\} \sin[\theta_1] \\ & + \{3L_1\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + L_2(\dot{\theta}_1^3 + 3\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^3 - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \sin[\theta_2] \\ & - 3L_2(\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2) \cos[\theta_2]\} \cos[\theta_1] \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{j}_{22} = & L_2(\dot{\theta}_1^3 + 3\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^3 - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \sin[\theta_1 + \theta_2] \\ & - 3L_2(\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2) \cos[\theta_1 + \theta_2] \end{aligned} \quad (6.13)$$

## 6.2 Calculul câmpului vitezei, accelerației, și accelerației de ordinul 3 pentru un manipulator general de tip 2C cu 4 grade de libertate

În această secțiune urmează analiza unui caz particular de mișcare pentru un manipulator general de tip 2C cu 4 grade de libertate, în câmpul accelerațiilor de ordin superior, utilizând quaternioni multi-duali unitari [49].



**Figura 6.1.** Mișcarea relativă a corpului terminal  $C_2$  față de sistemul de referință  $C_0$

Se va calcula simbolic quaternionul HMD unitar  $\hat{\underline{\varphi}}$ , pentru  $m=2, n=3$ :

$$\hat{\underline{\varphi}} = \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_1 \Delta \check{\alpha}_1 \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_2 \Delta \check{\alpha}_2 \right], \quad (6.14)$$

în care funcțiile de  $n$  ori derivabile pentru unghiurile duale  $\underline{\alpha}_1 = \underline{\alpha}_1(t)$ ,  $\underline{\alpha}_2 = \underline{\alpha}_2(t)$  și vectorii duali unitari  ${}^0\underline{\mathbf{u}}_1$ ,  ${}^1\underline{\mathbf{u}}_2$  sunt mărimi cunoscute.

Pentru determinarea completă a câmpurilor de hiper-stare, sa calculat quaternionul multi-dual:

$$\hat{\underline{\varphi}} = 1 + \boldsymbol{\varphi}_1 \varepsilon + \boldsymbol{\varphi}_2 \varepsilon^2 + \boldsymbol{\varphi}_3 \varepsilon^3 \quad (6.15)$$

unde  $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3$  sunt quaternioni reali și sunt dați de:

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \dot{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 \quad (6.16)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = -\frac{1}{8} [(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) - (2\ddot{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + 2\ddot{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)] \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_3 = & -\frac{1}{8} [\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 \ddot{\alpha}_2 + (\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2] - \frac{1}{48} [(4\ddot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_1^3 - 3\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2^2) \mathbf{u}_1 \\ & + (4\ddot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_2^3 - 3\dot{\alpha}_1^2 \dot{\alpha}_2) \mathbf{u}_2] + \frac{1}{8} (\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2) \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

și vectorul multi-dual [4]:

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_1 \varepsilon + \mathbf{a}_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \mathbf{a}_3 \frac{\varepsilon^3}{6} \quad (6.19)$$

în care  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  sunt vectori reali:

$$\mathbf{a}_1 = \dot{d}_1 \mathbf{u}_1 + \dot{\alpha}_1 \mathbf{u}_1^0 + \dot{d}_2 \mathbf{u}_2 + \dot{\alpha}_2 \mathbf{u}_2^0 \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 = & \ddot{d}_1 \mathbf{u}_1 + \ddot{\alpha}_1 \mathbf{u}_1^0 + \ddot{d}_2 \mathbf{u}_2 + \ddot{\alpha}_2 \mathbf{u}_2^0 + 2\dot{\alpha}_1 \dot{d}_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2^0 + \dot{\alpha}_1^2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1^0 \\ & + \dot{\alpha}_2^2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_2^0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 = & [\ddot{d}_1 + 3(\dot{\alpha}_1^2 \dot{d}_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \dot{\alpha}_1^2 \dot{\alpha}_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2^0)] \mathbf{u}_1 + [\ddot{d}_2 - 3(\dot{\alpha}_1^2 \dot{d}_2 - \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2^2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2^0)] \mathbf{u}_2 \\ & + (\ddot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_1^3) \mathbf{u}_1^0 + [\ddot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_2^3 - 3(\dot{\alpha}_1^2 \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2^2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)] \mathbf{u}_2^0 \\ & + 3(\dot{\alpha}_1 \ddot{d}_2 + \ddot{\alpha}_1 \dot{d}_2) \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + 3(\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2) \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2^0 \\ & + 3\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1^0 + 3\dot{\alpha}_2 \ddot{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_2^0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

## 7. CONCLUZII ȘI LUCRĂRI VIITOARE

Analiza cinematicii rigide realizată în această lucrare a urmărit să construiască un cadru unitar pentru descrierea mișcărilor și a accelerațiilor de ordin superior, cu aplicabilitate directă în robotică și în sistemele multi-corp.

Pornind de la fundamentele teoretice, sa constatat că reprezentările clasice prin matrici de rotație, deși complete, sunt redundante și sensibile numeric, iar parametrizările minimale, precum unghiurile Euler sau vectorii Rodrigues, sunt limitate de singularități. În acest context, quaternionii Hamiltonieni oferă o descriere globală, stabilă și coordonat-invariantă a rotațiilor, constituind baza formalismului ulterior. Extinderea către quaternionii duali a permis integrarea rotației și translației într-un singur obiect formal, reducând redundanța și oferind o compunere naturală a deplasărilor rigide.

Analiza câmpurilor de viteză și accelerație a arătat că acestea pot fi exprimate prin tensori asociați mișcării și prin vectori invarianți, ceea ce confirmă că viteza și accelerația unui punct nu depind de alegerea lui, ci de câmpul global al mișcării. Identificarea polului accelerațiilor a oferit un instrument pentru înțelegerea distribuției câmpului de accelerație și pentru localizarea zonelor de stabilitate. Formulările coordonat-invariante s-au dovedit mai robuste decât cele bazate pe parametrizări locale, evitând singularitățile și ambiguitățile.

Extinderea către accelerațiile de ordin superior a evidențiat că utilizarea exclusivă a vitezei și accelerației nu mai este suficientă pentru cerințele actuale de precizie. Metodele numerice clasice, nu surprind complet comportamentul în decursul mișcării unui lanț cinematic serial de corpuri, iar structurile multi-duale și hiper-multi-duale permit obținerea directă a câmpurilor de accelerații de ordin superior într-o formă compactă și coordonat-invariantă. Această abordare reduce complexitatea calculului și oferă un instrument eficient pentru analiza cinematică exactă.

Aplicarea formalismului la sisteme multi-corp seriale a arătat că derivatele în raport cu timpul de ordin superior se propagă natural de la o legătură la alta, confirmând că mișcarea corpului terminal dintr-un lanț cinematic serial poate fi descrisă unitar prin propagarea informației locale. Compatibilitatea formulărilor de tip Brockett cu structurile multi-duale a asigurat coerența între descrierea locală și rezultatul global. Integrarea accelerațiilor de ordin superior în formulărilor de tip Brockett permite obținerea unor traiectorii mai fluide și mai predictibile.

Evaluarea relevanței practice a arătat că utilizarea accelerațiilor de ordin superior utilizând metode clasice implică un consum ridicat de resurse hardware, ceea ce limitează aplicarea directă în sisteme complexe. Totuși, structurile multi-duale reduc semnificativ volumul de calcul, reunind într-un singur obiect informația despre poziție, viteză și accelerații de ordin superior.

Direcțiile viitoare de cercetare identificate includ:

- Integrarea dinamicii, inclusiv a forțelor și momentelor, în același cadru multi dual, ceea ce ar permite o descriere completă a mișcării și a interacțiunilor. În prezent, formalismul tratează cinematică de ordin superior, dar nu include explicit efectele dinamice. Extinderea către dinamică reprezintă un pas necesar pentru aplicarea practică în controlul avansat al roboților, aceasta ar însemna formularea unor structuri care să includă atât accelerațiile de ordin superior, cât și efectele dinamice asociate, reducând separarea artificială dintre cinematică și dinamică.

- Dezvoltarea unor algoritmi optimizați, capabili să valorifice avantajele formalismului și să funcționeze în timp real. Aceasta presupune identificarea unor metode de reducere a redundanțelor, implementarea unor scheme de verificare automată și utilizarea unor tehnici de aproximare controlată prin metode dedicate de interpolare, care să mențină precizia fără a suprasolicita resursele.

- Integrarea cu algoritmi de învățare automată, care pot anticipa comportamentul cinematic și ajusta traiectoriile în timp real. Această asociere ar permite dezvoltarea unor sisteme de control mai

robuste și mai adaptabile, capabile să reacționeze la variații neprevăzute. În practică, aceasta ar însemna utilizarea rețelelor neuronale sau a algoritmilor de optimizare pentru a completa formalismul matematic cu capacități predictive și adaptive.

- Formalismul matematic utilizat poate fi extins dincolo de robotică, către domenii emergente precum simularea materialelor avansate sau controlul sistemelor cuantice. În simularea materialelor, derivatele de ordin superior pot fi utilizate pentru descrierea comportamentului microscopic, iar în controlul sistemelor cuantice, structurile multi-duale pot fi adaptate pentru a reprezenta stări și evoluții complexe. Direcția viitoare constă în explorarea acestor aplicații interdisciplinare, care pot valorifica avantajele formalismului într-un mod inovator.

Aceste direcții confirmă că formalismul matematic utilizat dat de algebra multi-duală și hiper-multi-duală, poate fi adaptat și extins pentru a răspunde cerințelor emergente din robotică și din analiza sistemelor multi-corp, precum și în oarecare domeniu adiacent în care derivatele de ordin superior reprezintă o necesitate.

## Bibliografie

- [1] D. Condurache, „Advances Representation of Higher-Order Kinematics of Motion. Hypercomplex Lie Groups and Lie Algebras,” în *25th International Symposium on Measurements and Control in Robotics*, vol. 154, Springer Nature Switzerland, 2024, pp. 155-168.
- [2] D. Condurache, „An overview of higher-order kinematics of rigid body and multibody systems with nilpotent algebra,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 209, 07 2025.
- [3] D. Condurache, M. Cojocari și I.-A. Ciureanu, „A Closed Form of Higher-Order Cayley Transforms and Generalized Rodrigues Vectors Parameterization of Rigid Motion,” *Mathematics*, vol. 13, nr. 1, p. 114, 30 12 2024.
- [4] D. Condurache și M. Cojocari, „Hyper-State of Multibody Systems and Trident Quaternions,” în *ASME 2025 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Anaheim, California, USA.
- [5] A. Müller, „An overview of formulae for the higher-order kinematics of lower-pair chains with applications in robotics and mechanism theory,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 142, nr. 103594, 2019.
- [6] M. Cojocari și D. Condurache, „High-Order Derivatives of Serial Manipulator Jacobians Using Multidual Differentiation Transform,” în *BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI. Secția Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică*, Iasi, 2023.
- [7] A. Müller, „Higher Derivatives of the Kinematic Mapping and some Applications,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 76, pp. 70-85, 2014.
- [8] D. Condurache, „Dual Lie Algebra Representations of Rigid Body Motion With Dual Cayley Maps: An Overview,” în *ASME 2024 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Washington, DC, USA, 2024.
- [9] D. Condurache, „Higher-Order Accelerations Field with Multidual Algebra,” în *Acoustics and Vibration of Mechanical Structures – AVMS-2021*, Timișoara, 2021.
- [10] D. Condurache, „Higher-Order Kinematics in Dual Lie Algebra,” în *Advances on Tensor Analysis and their Applications*, IntechOpen, 2020.
- [11] D. Condurache, „Higher-Order Kinematics in dual Lie Algebra,” 2020, pp. 215-225.
- [12] D. Condurache, „Higher-Order Relative Kinematics of Rigid Body and Multibody Systems. A Novel Approach with Real and Dual Lie Algebras,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 176, 2022.
- [13] D. Condurache, „Dual Lie Algebra Representations of Rigid Body Motion With Dual Cayley Maps: An Overview,” în *ASME 2024 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Washington, DC, USA, 2024.
- [14] D. Condurache, „Product of Exponential Formula of Multidual Quaternions and Higher-Order Kinematics,” în *2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Rome, Italy, 2023.
- [15] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Higher-Order Kinematics of Planar Rigid Motion by Euclidean Tensors and Complex Algebra. An Overview,” în *New Advances in Mechanisms, Mechanical Transmissions and Robotics*, vol. 178, Springer Nature Switzerland, 2025, pp. 49-56.
- [16] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Hyper- State of Lower Pair Kinematics Chains and Automatic Differentiation of Nilpotent Algebra,” în *29th International Conference, Mechanika-2025*, Riga, Lithuania, 2025.

- [17] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „High-Order Derivatives of Serial Manipulator Jacobians Using Multidual Nilpotent Differentiation Transform,” în *ApplSciMeet European Meeting Applied Science and Engineering*, Berlin, Germany, 2025.
- [18] D. Condurache, „Analysis of Higher- Order Kinematics on Multibody Systems with Nilpotent Algebra,” în *Advances in Service and Industrial Robotics*, vol. 135, Springer Nature Switzerland, 2023, pp. 297-305.
- [19] D. Condurache, „Dual tensors based solutions for rigid body motion parameterization,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 74, nr. 0094114X, pp. 390-412, 12 2014.
- [20] D. Condurache și M. Cojocari, „The Extended Wahba's Problem in Dual and Multi-Dual Algebras,” în *2024 10th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Vallette, Malta, 2024.
- [21] D. Condurache și M. Matcovschi, „Computation of angular velocity and acceleration tensors by direct measurements,” *Acta Mechanica*, vol. 153, pp. 147-167, 2002.
- [22] D. Condurache și I. Popa, „A Minimal Parameterization of Rigid Body Displacement and Motion Using a Higher-Order Cayley Map by Dual Quaternions,” *Symmetry*, vol. 15, nr. 11, p. 2011, 2023.
- [23] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Direct and Inverse Higher-Order Kinematics of Lower-Pair Kinematic Chain,” în *Multibody Dynamics 2025: 12th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, Innsbruck, Austria, 2025.
- [24] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Hypercomplex Dual Lie Nilpotent Algebras and Higher-Order Kinematics of Rigid Body,” în *Mechanisms and Machine Science, Proceedings of SYROM 2022 & ROBOTICS 2022*, vol. 127, I. Doroftei, M. Nitulescu, D. Pisla și E. Lovasz, Ed., Springer International Publishing, 2023, pp. 89-96.
- [25] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Hypercomplex Quaternions and Higher-Order Analysis of Spatial Kinematic Chains,” vol. 69, nr. 1-4, pp. 21-34, 01 12 2023.
- [26] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Hyper-state of Rigid Body Kinematics and Automatic Differentiation of Trident Nilpotent Algebra,” în *Mechanisms and Machine Science, New Trends in Medical and Service Robotics*, vol. 186, Springer Nature Switzerland, 2025, pp. 544-553.
- [27] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Hypercomplex Dual Lie Nilpotent Algebras and Higher- Order Kinematics of Rigid Body,” în *SYROM 2022 & ROBOTICS 2022, 13th IFToMM International Symposium on Science of Mechanisms and Machines & XXV International Conference on Robotics*, Iași, România, 2022.
- [28] D. Condurache, M. Cojocari și I. Popa, „Multidual Quaternions and Higher-Order Analysis of Lower-Pair Kinematic Chain,” în *11th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, Lisboa, Portugal, 2023.
- [29] D. Condurache, M. Cojocari, I. Birlescu și B. Gherman, „Automatic Differentiation of Serial Manipulator Jacobians Using Multidual Algebra,” în *Advances in Service and Industrial Robotics*, vol. 157, D. Pisla, G. Carbone, D. Condurache și C. Vaida, Ed., Springer Nature Switzerland, pp. 379-388.
- [30] Z. Fu și E. Spyarakos, „Analytical Expressions of Serial Manipulator Jacobians and their High-Order Derivatives based on Lie Theory\*,” *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 7095-7100, 2020.
- [31] J. Gallardo-Alvarado, „Hyper-Jerk Analysis of Robot Manipulators,” *J Intell Robot Syst*, vol. 74, pp. 625-641, 2014.
- [32] J. Gallardo-Alvarado, „Hyper-Jerk Analysis of Robot Manipulators,” *J Intell Robot Syst*, vol. 74, p. 625–641, 2014.

- [33] D. Condurache, „Higher-Order Kinematics of Lower-Pair Chains With Hyper-Multidual Algebra,” în *ASME 2022 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Missouri, USA, 2022.
- [34] D. Condurache, „Higher-Order Kinematics of Rigid Bodies. A Tensors Algebra Approach,” *Mechanisms and Machine Science*, vol. 71, pp. 215-225, 2019.
- [35] D. Condurache, „Higher-Order Kinematics of Rigid Bodies. A Tensors Algebra Approach,” *Mechanisms and Machine Science*, vol. 71, pp. 215-225, 2019.
- [36] D. Condurache, „Multidual Algebra and Higher-Order Kinematics,” în *New Trends in Mechanism and Machine Science. EuCoMeS 2020. Mechanisms and Machine Science, vol 89*. Springer, Cluj-Napoca, România, 2020.
- [37] D. Condurache, „HIGHER-ORDER KINEMATICS AND HYPERCOMPLEX COMMUTATIVE ALGEBRA,” în *43RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHANICS OF SOLIDS, ACOUSTICS*, Braşov, România, 2019.
- [38] D. Condurache, *A NEW GENERAL INVESTIGATION OF THE KINEMATICS OF RIGID BODIES*, Iaşi: Polirom, 2000.
- [39] D. Condurache, *A New General Investigation of the Kinematics of Rigid Bodies*, Iaşi: Polirom, 2010.
- [40] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality.*, NEW JERSEY: Princeton University Press., 1999.
- [41] D. Condurache, „A Davenport dual angles approach for minimal parameterization of the rigid body displacement and motion,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 140, pp. 104-122, 10 2019.
- [42] R. M. Murray, Z. Li și S. S. Sastry, *A mathematical introduction to robotic manipulation*, Berkeley, California: CRC Press, 1994, p. 456.
- [43] D. Condurache, I. Popa și M. Cojocari, „An Application to Dual Algebra for Proposing a Novel Method for Quality Indicators of Surfaces: Evaluating Road Repairs with Smartphone Accelerometer Data,” în *8th International Conference of The Doctoral School*, Iasi, 2025.
- [44] D. Condurache, I. Popa și M. Cojocari, „An open data and dual algebra framework for analyzing urban transport expenditure in Romania,” în *International conference current economic trends In emerging and developing countries TIMTED*, Timisoara, 2025.
- [45] D. Condurache, I. Popa și M. Cojocari, „Dual Algebra Representations for Volumes Determination. An Overview.,” în *GEOMAT*, Iaşi, 2025.
- [46] O. A. Bauchau, „Parameterization of rotation,” în *Flexible Multibody Dynamics*, vol. 176, Dordrecht, Springer Netherlands, 2011, pp. 511-542.
- [47] D. Condurache, „Curs Mecanică Teoretică,” Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi , Iaşi, 2025.
- [48] D. Condurache și M. Cojocari, „Automatic Differentiation of Serial Manipulator Jacobians Using Multidual Algebra,” în *Advances in Service and Industrial Robotics*, Cluj, România, 2024.
- [49] D. Condurache, „An overview of higher-order kinematics of rigid body and multibody systems with nilpotent algebra,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 209, nr. 105959, 2025.
- [50] D. Condurache și I.-A. Ciureanu, „Baker–Campbell–Hausdorff–Dynkin Formula for the Lie Algebra of Rigid Body Displacements,” *Mathematics*, vol. 8, nr. 7, p. 1185, 19 07 2020.